بسم الله الرحمن الرحيم

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

برنامه آموزشی

- نام درس : ریاضی 3
- تعداد واحد : 4
- منبع : ریاضی 3
- مولف : جلوداری مقانی
- تهیه کننده : خسرو حجتي

(درس پایه و تخصصی الزامی رشته ریاضی محض)

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

اهداف

- پس از فرا گيري اين درس دانش
باید بتواند:

1. توابع چند متغیره را شناخته و اعمال مربوطه را با استفاده از تعاریف و قضایا انجام دهد.
2. انواع مجموعه ها را بشناسد.
3. تعاریف حد و مشتقات جزيي توابع و قضاياي آنها را بیان نموده و در حل مسایل بکار برد.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

4.بسط تيلور توابع را بنويسد و مقادير تقريبي را محاسبه كند.

5.تعريف نقاط بحراني و انواع آنها را بداند و با استفاده از قضايا آنها را محاسبه و تشخيص دهد.

6.آزمون مشتق دوم را بيان و در حل مسايل بكار برد.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

7.ماكزيمم و مينيمم توابع را تحت شرايط تابعي با استفاده ازروش لاگرانژ محاسبه كند.

8.انتگرالهاي چند گانه را با توجه به نواحي انتگرالگيري محاسبه كند.

9.كاربرد انتگرالهاي چندگانه در محاسبه حجم، ممان اينرسيو... بداند.

10.روشهاي تغيير متغير در انتگرالهاي چند گانه را بداند و در حل مسايل بكار بندد.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

11.انتگرال خطي، منحني الخط و رويه اي را بشناسد و مسايل مربوطه را حل كند. 12.اپراتور دل را بشناسد و گراديان، ديورژانس، كرل و لاپلاسين توابع را محاسبه كند.

13.قضاياي گرين، ديورژانس و استوكس را بيان نموده و آنها را در حل مسايل بكار گيرد.

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

فصل اول :

توابع چند متغیری

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعریف توابع اسکالر:

$$F : A \to B$$

$$A \subseteq R^2$$

$$B \subseteq R$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال تابع دومتغیره اسکالر:

$$F(x,y)=x+y+z \qquad (x,y)\in R^2$$

$$F(1,0)=1+0+2=3$$

اعمال جبری مانند توابع حقیقی است

انتشـــارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تســت طلایی
پیـــک طلایی
www.bookgolden.com

تعریف توابع برداری:

$$F : A \to B$$

$$A \subseteq R^n$$

$$B \subseteq R^m$$

بنابراین تابع اسکالر حالت خاص تابع برداری است

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

مثالی از تابع برداری :

$$f : t \to (\cos t, \sin t) \qquad t \in R$$

t=0 $\qquad$ f(0) = (1,0)

یا $\qquad f(x,y,z) = (x+y, z)$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعریف: درتابع برداری زیر

$$f : X \to \left(f_1(X),\ldots,f_m(X)\right), \quad X \in A \subseteq R^n$$

$$f_i : A \to R \qquad i=1,2,3,\ldots,m$$

توابع اسکالر f_i را توابع مولفه ای ویا مولفه های تابع برداری fمی نامیم .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال :

$$f(x,y,z) \to (x+y+z, xy+yy+yx+xyz)$$

$$f_1 :(x,y,y) \to x+y+z$$

$$f_2 :(x,y,y) \to xy+yz+zx$$

$$f_3 :(x,y,y) \to xyz$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف : در تابع برداری

$$f : X \to \left(f_{1}(x), \ldots, f_{m}(x) \right) X \in A \subseteq R^{n}$$

با انتخاب متغیرهای وابسته $u_1, \ldots, u_m$

معادلات $u_1 = f_1(x), \ldots, u_m = f_m(x)$ را معادلات

تابع برداری f می نامیم .

اعمال جبری مانند بردارهاست

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعريف : در تابع چند متغيره

$$f : X \to \left(f1(X), \ldots, fm(X)\right) \quad ,$$

$$X \sim (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \in A \subseteq R^n$$

1) اگر $B \subseteq A \Leftarrow f(B) = \{y \in R^m \mid f(X) = y, X \in B\}$

را **تصوير مجموعه B تحت f** می نامند .

2) مجموعه زيررا **نمودار تابع f** می نامند :

$$\{Z \mid Z \sim (X, f(X)) = (x1, \ldots, xn, f1(x), \ldots, fm(x)\} = GRF$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

3) نقطه $y_0 \in f(A)$ را در نظر می گیریم ، مجموعه

$E = \{X \in A | f(X) = y_0\}$ را <u>**مجموعه ترازتابع f**</u>

به ازاء y_0 نامند . که اگر تابع f اسکالر دو متغیره باشد

مجموعه های تراز را <u>**منحنی های تراز**</u> تابع و اگر f

اسکالرسه متغیره باشد مجموعه های ترازرا <u>**سطوح تراز**</u>

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال 1:

$$f:t\to(2t+1,-t)\qquad t\in R$$

f تحت [-1/2 , 0] تصویر فاصله: $A=f\left(\left[-\frac{1}{2},0\right]\right)$

$$=\left\{(x,y)\mid x=2t+1,y=-t,t\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\right\}$$

$$A=f\left(\left[-\frac{1}{2},0\right]\right)\quad=\left\{(x,y)\mid y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2},x\in[0,1]\right\}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$GRF = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) = (t, f(t)), t \in R\}$$

$$= \{(x,y,z) \mid (x,y,z) = (t, 2t+1, -t), t \in R\}$$

$$= \{(x,y,z) \mid x = t, y = 2t+1, z = -t, t \in R\}$$

که معادلات پارامتری خطی است که از نقطه (0و1و0) می گذرد و با بردار (1,2,-1)~ u موازی است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال2 :

تابع برداری سه متغیره زیر و نقطه $(1,2)\in R^2$ را در

نظر می گیریم ، مجموعه تراز تابع fبه ازاء نقطه (2و1)

را بدست آورید .

$$f:(x,y,z)\to\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4},z\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$A=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=(1,2)\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\middle|\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4},z\right)=(1,2)\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,z=2\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}=\left\{\frac{\mathrm{x}^2}{8}+\frac{\mathrm{y}^2}{18}=1\right\}$$

بیضی واقع در

<u>صفحه Z = 2</u>

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف همسایگی :

$$N(a,r)=\left\{x\in R^{2} \mid |x-a|<r\right\}$$

شعاع : r   مرکز : a

1) اگر $a\in R^2$ باشد همسایگی را قرص به مرکز a گویند .

2) و اگر $a\in R^3$ باشد همسایگی را یک گوی گویند .

3) همسایگی در R^n تعبیر هندسی ندارد .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعریف فاصله :

فاصله نقطه **x** از **a** عبارت است از :

$$|x-a|=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

قرص $N((0,0),2)$ عبارت است از:

$$N((0,0),2)=\left\{(x,y)\in R^2 \mid \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<2\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2<4\right\}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

نشان می دهیم که درهرهمسایگی میتوان یک همسایگی کوچکتر محاط کرد . یعنی :

$$\forall x \in N(x_0,r) \ :\exists \delta > 0 \ \ N(x,\delta) \subseteq N(x_0,r)$$

حل : فرض $\quad \mathbf{x} \in \mathrm{N}(\mathrm{x}_0,\mathrm{r}) \Rightarrow |\mathrm{x}-\mathrm{x}_0| < \mathrm{r}$

فرض $\quad 0 \le \delta = \mathrm{r} - |\mathrm{x}-\mathrm{x}_0| < \mathrm{r}$

حال برای اثبات y دلخواه را در نظر می گیریم:

$$\mathrm{y} \in \mathrm{N}(\mathrm{x}_0,\mathrm{r}) \Rightarrow |\mathrm{y}-\mathrm{x}| < \delta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

براساس نامساویمثلث

$$|y - x_0| = |(y - x) + (x - x_0)| \leq$$

$$|y - x| + |x - x_0| < \delta + |x - x_0| = r$$

$$\Rightarrow \quad y \in N(x_0, r)$$

$$\Rightarrow \quad N(x, \delta) \subseteq N(x_0, r)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مجموعه باز :

فرض کنیم $R^n \supseteq U$ آنگاه U را یک مجموعه باز

در R^n می نامیم هرگاه :

$$\forall x \in U \ : \ \exists r > 0 \ : \ N(x,r) \subseteq U$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

مثال :

$A = \{ (x,y) \in R \mid x > 0 \}$ یک زیرمجموعه باز از R^2 است: زیرا

$$\forall (x,y) \in A \quad \ni r > 0 \quad : \quad N((x,y),r) \subseteq A \quad ?$$

فرض $\quad (x,y) \in A \Rightarrow X > 0 \xrightarrow{\text{فرض}} r=x$

برای اثبات داریم : $\quad (x_1,y_1) \in N((x,y),r) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 > 0$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$|x_1 - x| = \sqrt{|x_1 - x|} \leq$$

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x$$

$$\Rightarrow -x < x_1 - x < x$$

$$\Rightarrow 0 < x_1 < 2x$$ وحکم ثابت است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعریف مجموعه بسته :

$F \subseteq R^n$ را بسته گوئیم هرگاه F^C (متمم F)

در R^n باز باشد .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$V = \{(x,y) \int x \leq 0, y \geq 0\}$ در R^{C} بسته

است. زیرا

$$V^{c} = \{(x,y) \mid x > 0, y < 0\}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مجموعه کراندار :

$S\subseteq R^2$ را کراندار گویند اگر S زیرمجموعه ای از یک قرص باشد . بعبارت دیگر :

$\exists \; M>0 \; : S\subset D_M(0,0)$ اگر S کراندار است

$S\subseteq R^3$ را کراندار گویند اگر S زیرمجموعه ای از یک گوی باشد . بعبارت دیگر :

$\exists \; M>0 \; : S\subset D_M(0,0,0)$ اگر S کراندار است

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

در غیراینصورت S را بی کران گویند .

یعنی خارج هر قرص به مرکز مبدأ نقطه ای

از S واقع است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

$$\left\{(x,y)\ \middle|\ (x-1)^2+(y-1)^2<5\right\}$$ کراندار است

زیرا مجموعه همه نقاط داخل دایره به شعاع $\sqrt{5}$ و

مرکز(1و1) است . بنابراین کافی است قرصی

انتخاب شود که همه دایره را در برگیرد . یعنی کافی

است $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ باشد M.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مجموعه همبند :

$C\subset R^{n}$ $(n=2,3)$ را همبند گویند هر گاه بتوان

هر دونقطه x ,y از آن را توسط یک خط شکسته

واقع در آن بهم وصل کرد .

مجموعه باز همبند را یک ناحیه گویند .

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

تعریف همسایگی محذوف یا بدون مرکز :

$$a \in R^n \quad , \quad N(a,r) \quad \text{مفروض}$$

$$N'(a,r) = N(a,r) - \{a\}$$

$$= \left\{ x \in R^n \mid 0 < |x - a| < r \right\}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال : $N((1,0,1),2)$ در R^3 باز است . زیرا :

فرض $\quad X_0 \subset N((1,0,1),2)$

$$\Rightarrow \exists \ \delta > 0 \ : N(X_0,\delta) \subseteq N((1,0,1),2)$$

اگر: فرض $\quad \delta = 2 - \left|(1,0,1) - X_0\right|$

$$= 2 - \sqrt{(1-x_0)^2 + y_0{}^2 + (1-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow 0 < \delta < 2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

برای اثبات در نظر می گیریم : $X \in N(x_0, \delta)$

بنابر نا مساوی مثلث

$$|X-(1,0,1)| = |X - X_0 + X_0 - (1,0,1)|$$

$$\le |X - X_0| + |X_0 - (1,0,1)| < \delta + |X_0 - (1,0,1)| = 2$$

$$\Rightarrow X \in N((1,0,1),2)$$

$$\Rightarrow N(X_0, \delta) \subseteq N((1,0,1),2) \Rightarrow$$ باز است

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف حد : در نظر می گیریم

تابع $F : A \to B \quad , B \subseteq R^m \quad , A \subseteq R^n \quad , x_0 \in R^n$

فرض کنید A شامل یک همسایگی محذوف نقطه x_0 است .

گوئیم F در نقطه x_0 دارای حد $L \in R^m$ است اگر :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \forall x \in N(x_0, \delta) : f(x) \in N(L, \varepsilon)$$

در این صورت می نویسیم :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

و یا :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال :

نشان می دهیم حد تابع $F(x,y) \to x_0 : (x,y) \in R^2$

در نقطه $X_0 \sim (x_0, y_0)$ برابر x_0 است .

$$\left|F(x,y) - x_0\right| = \left|x - x_0\right| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\left|(x,y) - (x_0, y_0)\right| = \left|X - X_0\right| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon$$

$$\left|X - X_0\right| < \delta \Rightarrow \left|F(X) - X_0\right| < \varepsilon$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = y_0$$

و بطور کلی همان فرمول حد برای تابع n متغیره

صحیح است .

$$\lim_{X\to X_0} F(X) = F(X_0)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال:

نشان می دهیم که تابع زیردرنقطه $X_0 \sim (0,0)$ حد ندارد .

$$F(x,y)\to \frac{x^2}{x^2+y^2} : (x,y)\in R^2 - \{(0,0)\}$$

<u>فرض خلف</u> :

$$\lim_{X\to X_0} F(X) = L$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

بنابراین برای $\varepsilon = \varepsilon_0$ باید عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$0 < |X - X_0| < \delta \Rightarrow |F(X) - L| < \varepsilon_0$$

$$0 < |X| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} - L \right| < \varepsilon_0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

حالا نقطه $\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$ را در نظر می گیریم چون

$$\left|\left(0,\frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta, \qquad F\left(0,\frac{\delta}{2}\right) = 0$$

داریم $|L| < \varepsilon_0$ 1

حال اگر نقطه $\left(\dfrac{\delta}{2},0\right)$ را در نظر بگیریم چون

$$F\left(\frac{\delta}{2},0\right) = 1, \qquad \left|\left(\frac{\delta}{2},0\right)\right| < \delta$$

داریم $|1-L| < \varepsilon_0$ 2

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\Rightarrow 1 = |\ L + 1 - L\ | \leq |\ L\ | + |\ 1 - L\ |$$

$$< \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$$

حال اگر : $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

$\Leftarrow \quad 1 < 1$ که تناقض است بنابراین تابع حد ندارد .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حد در صورت وجود منحصر به فرد است .

کلیه فرمولهای حد توابع حقیقی در مورد توابع چند متغیره نیز صادق است .

بنابراین اگر هر مولفه حد داشته باشد تابع حد دارد .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

$$F:(x,y,z)\to\left(x^2+y^2,xy,\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\right)$$

$$X_0\approx(1,0,2)$$

$$\lim f(x,y,z)=\left(1,0,\frac{1}{6}\right)$$

$$(x,y,z)\to X_0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

پیوستگی مثل توابع حقیقی ، اگر حد با مقدارتابع

برابرباشد پیوسته است و بطور کلی وقتی همه مولفه

هاپیوسته باشند تابع پیوسته است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

نكاتي درمورد پيوستگي

تعريف: هر گاه f يك تابع دو متغيره بوده ونمو f در نقطه (x_0, y_0) را چنين نمايش دهيم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\Delta f(x_0, y_0)=$$
$$=D_1 f(x_0, y_0)\Delta x+D_2 f(x_0, y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

بطوريكه: $\exists \varepsilon_1=\varepsilon_1(\Delta x) \quad , \quad \exists \varepsilon_2=\varepsilon_2(\Delta x)$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعريف مشتقپذيري

اگر در تعريف قبل داشته باشيم:

$$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \Rightarrow \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$$

در اينصورت f در (x_0, y_0) مشتقپذير است.

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

قضیه: هر گاه تابع دو متغیره f در نقطه اي مشتقپذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

قضیه: اگر مشتقات جزئي تابع دو متغیره بر قرص باز موجود و در نقطه a پیوسته باشد آنگاه f در آن نقطه مشتقپذیر است.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال:

$$f(x,y)=3x-xy^2$$

$$D_1=3-y^2 \quad , \quad D_2=-2xy$$

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=3\Delta x-y_0^2\Delta x-2x_0y_0\Delta y-2y_0\Delta x\Delta y-$$

$$-x_0(\Delta y)^2-\Delta x(\Delta y)^2$$

با استفاده از تعریف محاسبه میکنیم:

$$\Delta f(x_0,y_0)-D_1f(x_0,y_0)\Delta x-D_2f(x_0,y_0)\Delta y=$$

$$=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_{2\Delta}y$$

1

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

طرف چپ 1 پس از خلاصه كردن:

$$= -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

كه بايد به يكي از چهار طريق زير معادل طرف راست 1 باشد. يعني:

$$[-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2]\Delta x + (-x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-2y_0\Delta y)\Delta x + (-\Delta x\Delta y - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-(\Delta y)^2]\Delta x + (-y_0\Delta x - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$0\Delta x + [-2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y]\Delta y$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

چون توابع $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ وجود دارند كافي است در يك مورد نشان داده شود كه

$$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \Rightarrow \varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$$

بنابراين

$$\varepsilon_1 = -2y_0\Delta y - (\Delta y)^2 \quad , \quad \varepsilon_2 = -x_0\Delta y$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

در نتیجه تابع مشتقپذیر بوده

و در نقطه (x_0, y_0)

پیوسته است.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال:در مورد پیوستگي تابع زير تحقيق كنيد:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$D_1f=\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}\Rightarrow x=my^2\Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}=\frac{4m}{(m^2+1)^2}$$

بنابر اين حد ندارد و در نتيجه پيوسته نيست.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: نشان دهید تابع زیر پیوسته است

$$f(x,y,z)=\cosh(x^2+y^2+z^2)+e^{x^2+y^2+1}+\sinh xyz$$

پیوسته

چون توابع هیپربولیك و نمائي پیوسته و ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است بنابراین تابع f پیوسته است

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مشتق جزئی :

اگر تابع اسکالر $F:A\to B$: $A\subseteq R^n$ روی یک همسایگی نقطه

$X=(x_1,\ldots,x_n)\in A$ تعریف شده باشد در اینصورت رابطه زیر را در

صورت وجود مشتق جزئی F درنقطه X نسبت به متغیر i ام نامند و با

$\dfrac{\partial F(X)}{\partial x_i}$ یا $F_{x_i}(X)$ یا $D_iF(X)$ نشان می دهند .

$$\lim_{n\to 0}\frac{F(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_h)-F(x_1,\ldots x_h)}{h}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

$$F:(x,y)\rightarrow x^2y+y^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{(x+h)^2y+y^3-(x^2y+y^3)}{h}=2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+3y^2$$

مشتقات جزئی مراتب بالا تر

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

مثال :

$$F(x,y) \to xy + x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = y + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = x + 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 6xy$$

تساوی وقتی برقرار است که پیوسته باشد .

اگر مشتقات جزئی موجود وپیوسته باشند تا هر مرتبه ای گویند تابع از رده

C^n (n همان مرتبه) است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

مثال :

$$f:(x,y)\to\left(x^2+xy,x^2y+y^2\right)$$

$$(x,y)\in R^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2x+y,2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(x,x^2+2y\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين: مشتقات جزئي تابع زير را پيدا كنيد:

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\sin\lambda\mu}{1+\lambda^2+\mu^2},\quad p=(1,\frac{\pi}{3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\frac{\mu\cos\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2)-2\lambda\sin\lambda\mu}{(1+\lambda^2+\mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial\lambda}=\frac{\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\times(2+\frac{\pi^2}{9})-2\sin\frac{\pi}{3}}{(2+\frac{\pi^2}{9})^2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}=\frac{\lambda\cos\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2)-2\mu\sin\lambda\mu}{(1+\lambda^2+\mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial \lambda}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}\times(2+\frac{\pi^2}{9})-2\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{(2+\frac{\pi^2}{9})^2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرين:اگر تابع f داراي مشتقات جزئي پيوسته باشدو $w=f(u,v)$ $u=x+y$, $v=x-y$ ثابت كنيد:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u},-\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

راهنماي طلايي
تست طلايي
پيك طلايي
انتشارات طلايي
پديدگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرین:مشتق جزئي تابع داده شده را در نقطه داده شده پيدا كنيد

$$w = \frac{xy}{z}\cos y^{z} \quad , \quad p(1,\pi,\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{z}\cos y^{z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(p) = 2\pi\cos\pi^{\frac{1}{2}}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{z}\cos y^{z} - xy^{z}\sin y^{z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(p) = 2\cos \pi^{1/2} - \pi^{1/2}\sin \pi^{1/2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^{2}}\cos y^{z} - \frac{xy^{z+1} Lny}{z}\sin y^{z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(p) = -4\pi\cos \pi^{1/2} - 2\pi^{3/2}\sin \pi^{1/2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مشتق جهت دار :

با فرض: V بردار واحد $f:A\to R\ ,x_0\in A\ ,$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+hv\right)-f\left(x_0\right)}{h}=D_V f\left(x_0\right)$$

در صورت وجود مشتق جهت دار f در نقطه x_0 و در

جهت V است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال : $f:(x,y)\rightarrow 2xy^2-3x^2+5y$

در نقطه $x_0=(1,2)$

و در جهت بردار واحد $V=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

داریم : $x_0+hv=(1,2)+\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{-h}{\sqrt{2}}\right)=$

$$\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}},2-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$f\left(x_0+hv\right)-f\left(x_0\right)=2\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(2-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$-3\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2+5\left(2-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-15=$$

$$=\frac{h^3}{\sqrt{2}}-\frac{9}{2}h^2-\frac{11}{\sqrt{2}}h$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$D_V f(1,2)=$$

$$\lim \frac{\frac{h^3}{\sqrt{2}}-\frac{9}{2}h^2-\frac{11}{\sqrt{2}}h}{h}=-\frac{11}{\sqrt{2}}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مماس و قائم :

صفحه π در نقطه P بر رویه S مماس است اگر

πبرمنحنی های واقع برS ومار بر Pمماس باشد.

بعبارت دیگر صفحه πدر نقطه P بر رویه S

مماس است اگر شامل تمام خطوطی باشد که در نقطه

P به منحنی های واقع بر S و مار بر P مماس

باشد .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خطی که از P گذشته و بر صفحه مماس بر S در P

عمودباشد، خط عمود برS درنقطه Pنامیده می شود .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

فرمول امتداد قائم بر صفحه مماس بر رویه S در R^3

نقطه $P:(x_0,y_0,z_0)$

$$N = -f_1(x_0,y_0)i - f_2(x_0,y_0)j + k$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

معادله صفحه مماس بر رویه S در نقطه P :

$$\mu\ f_1(x_0, y_0)(x - x_0)\,\mu\ f_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\pm(z - z_0) = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

معادله خط قائم بر رویه S در نقطه P :

$$\frac{x-x_0}{f_1(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_2(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

$$Z = COS\frac{\pi x}{2} \qquad P(1,0,0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

معادله صفحه مماس $$-\frac{\pi}{2}(x-1) + 0(y) - (z) = 0$$

معادله خط قائم $$\frac{x-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{z}{1}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

شرط وجود صفحه مماس :

اگر تابع $z=f(x,y)$ روی مستطیل باز زیر پیوسته باشد

$$R=\{(x,y)\,|\,|x-x_0|<h \;\;,\;\; |y-y_0|<k\}$$

ومشتقات جزئی آن روی R وجود داشته ودرنقطه (x_0,y_0)

پیوسته باشد،(شرایط قضیه نمو)آنگاه تابع خطیL که نمودار آن

صفحه مماس بررویه Z درنقطه $\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$ وجود

دارد . که نمودار آن صفحه مماس رویه است .

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_1(x_0,y_0)(x-x_0)+f_2(x_0,y_0)(y-y_0)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
www.bookgolden.com

قاعده زنجیره ای :

$$g:R^2 \to R \quad , x=x(t) \quad , y=y(t)$$

اگر g دارای مشتقات جزئی روی همسایگی از نقطه (x_0,y_0) بوده و در این

نقطه پیوسته باشند و توابع x و y در نقطه $t=t_0$ مشتقپذیر آنگاه با فرض

$$(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$$ تابع مرکب $$G(t)=g(x(t),y(t))$$

درنقطه t_0 مشتقپذیر است و داریم :

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t=t_0} =$$

$$g\big(x(t_0)y(t_0)\big),x'(t_0)+g\big(x(t_0)y(t_0)\big),y'(t_0)$$

$$=g_1(x_0,y_0)x'(t_0)+g_2(x_0,y_0)y'(t_0)$$

$$=g_1x'+g_2y'$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال:

$$T=Ln(xyzt)\ ,\ x=\sin u\ ,\ y=\cos u\ ,\quad z=e^{u}\ ,\ t=e^{-u}$$

$$\frac{dT}{du}=\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\quad+\frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$=\frac{1}{x}\cos u-\frac{1}{y}\sin u+\frac{1}{z}e^{u}-\frac{1}{t}e^{-u}\quad=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+1-1$$

$$=\frac{y^2-x^2}{xy}=\frac{\cos 2u}{\frac{1}{2}\sin 2u}=2\cot 2u$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مشتق گیری ضمنی :

$$F\left(x,y,z\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1\left(x,y,z\right)}{F_3\left(x,y,z\right)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2}{F_3}$$

$$F_3\neq 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

فرمول تقریب :

بشرط Δx و Δy بحد کافی کوچک

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx$$
$$f\left(x_0, y_0\right)+f_1\left(x_0, y_0\right)\Delta x+f_2\left(x_0, y_0\right)\Delta y$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال : معادله صفحه مماس بر $xy+yz+zx=0$ را در نقطه $(2,2,1)$ پیدا کنید .

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{y+x}=-\frac{3}{4} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{y+x}=-\frac{3}{4}$$

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)$$

$$z-1=-\frac{3}{4}(x-2)-\frac{3}{4}(y-2)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف گرادیان :

فرض کنیم تابع اسکالر n متغیره F روی مجموعه

$A \subseteq R^n$ دارای تمام مشتقات جزئی مرتبه اول باشد در

اینصورت :

$$\nabla f = gradf :$$

$$x :\to \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

$$, X \in A$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال:

$$f:(x,y,z)\to 2x^2y+yz$$

$$\nabla f=\left(4xy,2x^2+z,y\right)$$

$$\nabla f(1,1,2)=(4,4,1)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قاعده زنجیره ای : (برداری و اسکالر)

$$g : B \to R \quad , \quad f : A \to B$$

$$A \subseteq R^{n} \quad , B \subseteq R^{m}$$

g,f روی قلمروشان دارای مشتقات جزئی پیوسته اند .

در اینصورت داریم :

$$\frac{\partial gof}{\partial x_i}(X) = \nabla g\big(f(X)\big) . \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

مثال :

$$f:(x,y)\to(x+y,xy)$$

$$g:(x,y)\to x^2+y^2$$

$$\nabla g(x,y)=(2x,2y)$$

$$\Rightarrow\nabla g(f(x,y))=(2(x+y),2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1,2)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial(gof)}{\partial x}(x,y)=2(x+y)+2x^2y$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل مثال فوق از روش معمولی :

$$gof(x,y)=g\big(f(x,y)\big)=g(x+y,xy)$$

$$=(x+y)^2+x^2y^2$$

$$\frac{\partial(gof)}{\partial x}(x,y)=2(x+y)+2xy^2$$

که همان است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه :

رابطه بین مشتق جهت دار و گرادیان :

$$D_V f(X_0) = V \cdot \nabla f(X_0)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

مشتق جهت دارتابع روبرورا درنقطه $X_0 \sim (3,-1,-2)$

و در جهت بردار $V = \left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$ بدست آورید :

$$f:(x,y,z)\rightarrow 2x^2y+yz$$

$$\nabla f=(-12,16,-1)$$

$$D_v f=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).(-12,16,-1)=\frac{18}{17}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرین:مشتق سوئي تابع داده شده را در نقطه وسوي تعيين شده پيدا كنيد:

$$f(x,y) = x\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad , \quad x=(1,1) \quad , \quad A=2i-j$$

$$\nabla f = (\tan^{-1}\frac{y}{x} + x\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2})$$

$$\nabla f(1,1) = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$u=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$$

$$D_u f(1,1)=\nabla f(1,1).u=$$

$$=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).(\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1))=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\pi}{2}-1-1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\pi}{2}-2)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين: مشتق سوئي تابع داده شده را در نقطه وسوي تعيين شده پيدا كنيد:

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \quad , \quad p(6,6) \quad , \quad v=3i+4j$$

حل:

$$\nabla f=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2},-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\nabla f(p)=(0,0) \quad , \quad u=\frac{1}{5}(3i+4j)$$

$$D_u f(p)=0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه داده شده را در نقطه داده شده پیدا کنید:

$$x^2z - xy^2 - yz^2 = 8 \quad , \quad p = (0,-2,3)$$

$$\nabla = (2xz - y^2, -2xy - z^2, x^2 - 2yz)$$

$$\nabla(p) = (-4,-9,12)$$

$$-4(x-0) - 9(y+2) + 12(z-3) = 0$$

$$\frac{x}{-4} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-3}{12}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

یادآوری بسط تیلور توابع یک متغیره :

اگر مشتقات مراتب مختلف تابع یک متغیره حقیقی f در

همسایگی (a-h , a+h) موجود باشند آنگاه برای

$x \in (a-h, a+h)$ وداریم :

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\dots+$$

$$\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^{n}}{n!}f^{n}(\xi)$$

ξ بين a و x وجود دارد که

باقیمانده مرتبه n ام f در نقطه a :

$$\frac{(x-a)^{n}}{n!}f^{n}(\xi)$$

خواهیم داشت :

در فرمول فوق اگر باقیمانده نوشته نشود آن را چند جمله ای تیلور گویند

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه :

فرض کنیم f درهمسایگی N از نقطه (a,b) دارای

مشتقات جزئی مرتبه سوم پیوسته باشد . دراینصورت :

$$f : A \subseteq R^2 \to R$$

$$\forall (x,y)\in N : \exists (\xi, n) \in (x,y),(a,b)$$ خط واصل

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$f(x,y)= f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+$$

$$(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+R_1(x,y,a,b,\xi,n)$$

بسط تیلورمرتبه اول تابع f حول نقطه (a,b) با باقیمانده R1 است.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$:f(x,y)=$$

$$f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$+\frac{1}{2}[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+$$

$$(y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}]+R_2\quad(x,y,a,b,\xi,\eta)$$

که بسط تیلور مرتبه دوم تابع f حول نقطه (a,b) باقیمانده R است

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

بسط تیلور مرتبه دوم تابع $f(x,y)=2x^2-xy-y^2$ را در

نقطه $(a,b)=(0,0)$ محاسبه کنید .

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y=0 \qquad , \frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4 \qquad , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-1 \qquad , \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

$$\Rightarrow f(x,y)=0+0+0+\frac{1}{2}\left[x^2+4+2xy(-1)+y^2(-2)\right]+R_2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: بسط تیلور مرتبه دوم تابع زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$f(x,y)=2x^2-xy-3y^2-3x+7y$$

$$(a,b)=(2,5)$$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-3\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x-6y+7\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)=-25$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$f\left(2,5\right) = -76$$

$$f(x, y) = -76 + 0(x-2) - 25(y-5) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(4(x-2)^2 - 2(x-2)(y-5) - 6(y-5)^2\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: بسط تیلور مرتبه دوم تابع زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 2y$$

$$(a,b) = (2,-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y + 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$f(2,-1) = -4$$

$$f(x,y) = -4 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2(x-2)^2 + \\ 2(x-2)(y+1) + 4(y+1)^2 \end{bmatrix}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف مینیمم و ماکسیمم :

$f: A \to B$ $\quad$: $A \subseteq R^n$

1) $x_0 \in A$ را یک نقطه مینیمم نسبی f می نامیم هرگاه $\exists N(x_0, r) \subseteq A$

بطوریکه : $x \in N'(x_0, r) \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

در این صورت $f(x_0)$ یک مینیمم نسبی f است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

2. $x_0 \in A$ رایک نقطه ماکزیمم نسبی f

می نامیم هرگاه

$$\exists N(x_0,r) \subseteq A$$

بطوریکه

$$x \in N'(x_0,r) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را یک ماکزیمم نسبی f گویند .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

3) $x_0 \in A$ را یک نقطه ماکزیمم مطلق f نامند هرگاه

$$\forall x \in A \qquad f(x) \le f(x_0)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را ماکزیمم مطلق f نامند .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

4. $x_0 \in A$ را یک نقطه مینیمم مطلق f نامند هرگاه

$$\forall x \in A \quad f(x_0) \le f(x)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را مینیمم مطلق f نامند .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال :

تابع $f(x,y)=2-x^2-y^2$ را در نظر می گیریم :

$$f(0,0)=2>2-x^2-y^2=f(x,y)$$

$\forall (x,y)\in R^2 \Rightarrow$ (0,0) نقطه ماکزیمم مطلق است .

F(0,0) ماکزیمم مطلق و نسبی است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

تابع $f(x,y)=(x-y+1)^2$ را در نظر می گیریم :

$$\forall (x,y)\in R^2 \qquad : f(x,y)\geq 0 \Rightarrow$$

چون مقدار تابع در هر نقطه خط $x-y+1=0$ برابر صفر است نقاط روی

خط فوق مینیمم مطلق f است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه :

$$f : A \to R \qquad , \qquad A \subseteq R^n$$

اگر f روی $N(x_0,r)$ مشتق پذیر باشد و $x_0 \in N$ یک نقطه

ماکزیمم یا مینیمم نسبی f باشد . آنگاه

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = (0, \ldots, 0)$$

بعبارت دیگر :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف نقطه بحرانی :

$x_0 \in dom f$ را یک نقطه بحرانی f گویند اگر در یکی از دو شرط زیر صدق کند :

الف) f در نقطه x_0 مشتق پذیر نباشد. (لااقل یکی از مشتقات جزئی موجود نباشد.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)=0 \end{cases}$$

ب) f در x_0 مشتقپذیر و $\nabla f(x_0)=0$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

در نتیجه نقاط ماکزیمم و مینیمم یکی از نقاط بحرانی است

یعنی جواب دستگاه زیر یک نقطه بحرانی یا ماکزیمم و

مینیمم است .

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)=0 \end{cases}$$

در صورتیکه نقاط بحرانی ، ماکزیمم یا مینیمم نباشد آنرا

نقطه زین اسبی گویند .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

نقاط بحرانی تابع زیر کدامند ؟

$$f\left(x,y\right)=x^2+xy+2y^2-3x+2y$$

پاسخ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-3=0$$

$$\Rightarrow y=-1, x=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+4y+2=0$$

نقاط بحرانی : (1- و2)

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه : (آزمون مشتق دوم)

$$f:A\to R \quad , \quad A\subseteq R^n$$

مفروض : $N(x_0), x_0\in A$ همسایگی

فرض می کنیم f روی $N(x_0)$ از رده C^2 و x_0 یک نقطه

بحرانی f باشد در اینصورت :

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \quad , \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0)$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \quad , \quad D=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

آنگاه :

الف : اگر $D<0$ نقطه x_0 نقطه زین اسبی است .

ب: اگر $D>0$ و $A>0$ نقطه x_0 مینیمم نسبی است .

ج: اگر $D>0$ و $A<0$ نقطه x_0 ماکزیمم نسبی است .

د: اگر $D=0$ نمی توان اظهار نظر کرد .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال :

نوع نقاط بحرانی تابع زیر را تعیین کنید .

$$f(x,y)=x^3+y^2-3xy+15$$

پاسخ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=0\Rightarrow y=0 \\ x=1\Rightarrow y=1 \end{matrix}$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3 \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

ادامه جواب :

$$(0,0): A=0 \quad B=-3 \quad C=0$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-9<0 \Rightarrow$$ زین اسبی

$$(1,1): A=6>0 \quad B=-3 \quad C=6$$

$$D=AC-B^2=36-9>0 \Rightarrow$$ مینیمم نسبی

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

محاسبه ماكزيمم ومينيمم تحت شرايط خاص :

برای پيدا کردن نقطه ماکزيمم و مينيمم تابع f نسبت به شرط $g(x,y,z)=0$ بايد دستگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial y}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial g}{\partial z} \qquad (g(x,y,z))=0$$

را نسبت به x و y و z و λ حل نمود وجواب نقطه (x,y,z) است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

ماکزیمم و مینیمم فاصله مبدا را تا منحنی زیر پیدا کنید .

$$5x^2+6xy+5y^2-8=0$$

پاسخ:

فرمول فاصله : $f=d=x^2+y^2$ (زیرا نقاط واقع بر این دایره بیشترین فاصله را دارند)

$$\begin{cases} 2x=\lambda(10x+6y) \\ 2y=\lambda(6x+10y) \\ 5x^2+6xy+5y^2-8=0 \end{cases} \Rightarrow 4\lambda(y^2-x^2)=0 \Rightarrow y=\pm x$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$2x^2=1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f=1$$

مینیمم

نقاط ماکزیمم و مینیمم

$$x^2=2 \quad \Rightarrow \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \quad , \quad \left(-\sqrt{2},+\sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow f=4$$

ماکزیمم

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: نشان دهید که ماکزیمم تابع

روي كره زير f(x,y,z)=x+y+z

عبارت است از $a\sqrt{3}$

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

حل:

$$g: x^2+y^2+z^2=a^2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$\nabla f = (1,1,1) \quad , \quad \nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ z = \dfrac{1}{2\lambda} \\ (\dfrac{1}{2\lambda})^2 + (\dfrac{1}{2\lambda})^2 + (\dfrac{1}{2\lambda})^2 = a^2 \end{cases}$$

$$3(\frac{1}{2\lambda})^2 = a^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2a} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=a\sqrt{3}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

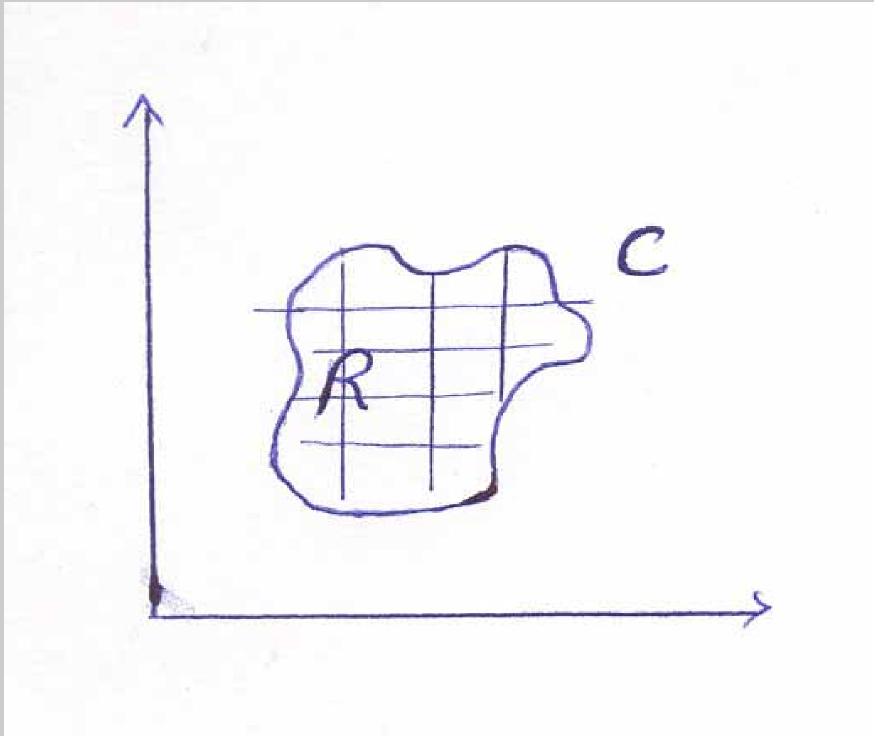
بخش دوم :

انتگرال دوبل :

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

انتگرال در ناحیه R که توسط منحنی C محدود شده:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

برای محاسبه ناحیه را به مستطیل های کوچک تقسیم میکنیم

ومشابه عملیات انتگرال معمولی مجموع مساحات و حد آنها را

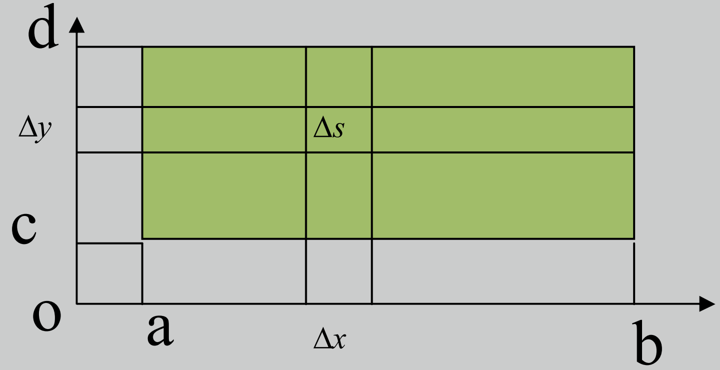
حساب می نمائیم که به این ترتیب اگر ناحیه f به مستطیلی

فرض شود که توسط خطوط $y=d$ و $y=c$ و $x=b$ و $x=a$

محدود شده خواهیم داشت :

انتشارات طلایی پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

حالت خاص :



$$\int_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

$$= \underbrace{\int_c^d \underbrace{\int_d^b f(x,y)\,dx}_{\text{اول محاسبه می شود}}\,dy}_{\text{بعد}} = \underbrace{\int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{اول محاسبه می شود}}\,dx}_{\text{بعد}}$$

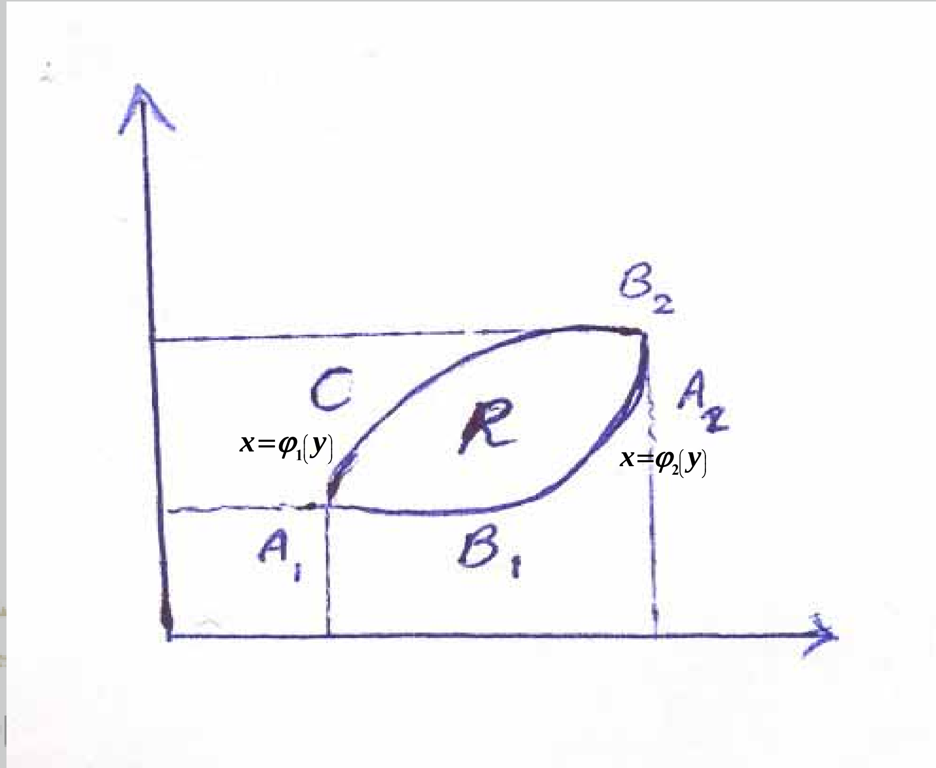
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

در حالت کلی R مستطیل نبوده و ناحیه ای باشد که با منحنی C محدود شده باشد

.

فرض کنید که B_1 و B_2 به ترتیب مینیمم و ماکزیمم منحنی را تشکیل داده و A_1

و A_2 کمترین وبیشترین مقادیر C روی محور افقی را تعیین می کنند .



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
www.bookgolden

$x=\varphi_1(y)$ را معادله $B_1A_1B_2$ و $x=\varphi_2(y)$ را معادله

منحنی $B_1A_2B_2$ بگیرید. در اینصورت به جای a

و b مقادیر $\varphi_1(y)$ و $\varphi_2(y)$ و به جای c و d مقادیر B_1 و

B_2 قرار می گیرند . در نتیجه خواهیم داشت :

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\int_R f(x,y)\,dA = \int_{B_1}^{B_2}\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

و بهمین ترتیب می توان نوشت :

$$\int_R f(x,y)\,dA = \int_{a_1}^{a_2}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

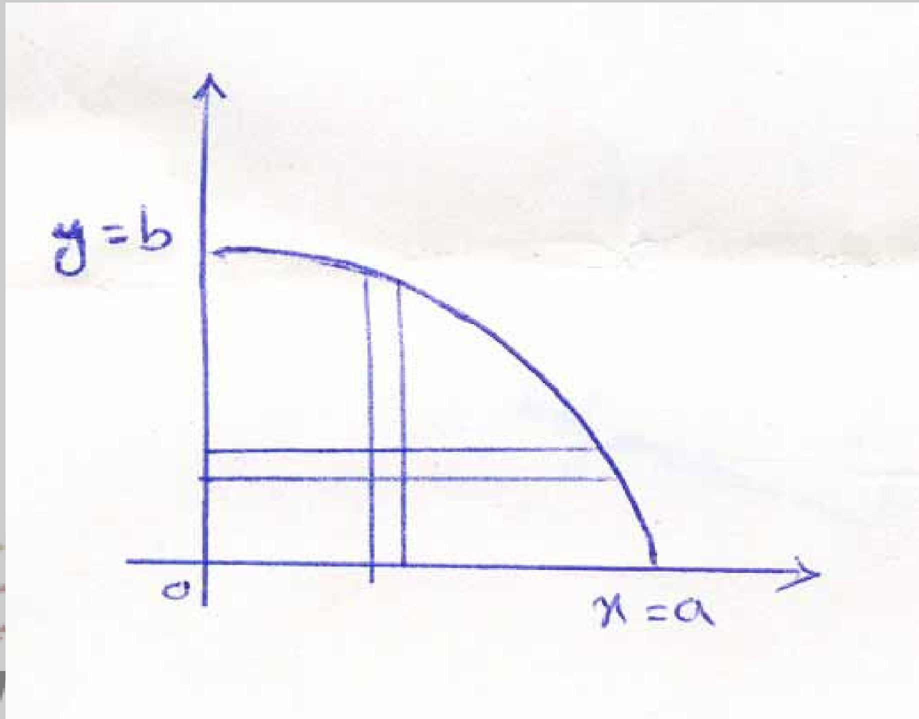
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال :

مقدار $I_1=\int_R ydA$ را روی ناحیه محدود شده R که ربع

بیضی ای به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است را محاسبه کنید .



پاسخ:

$$I_1=\int_0^b\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} ydxdy$$

$$=\int_0^b \left(xy\Big|_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \right) dy$$

هنمای طلایی
ست طلایی
یک طلایی
www

$$=\frac{a}{b}\int_0^b y\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$=-\frac{a}{3b}\left(b^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{ab^2}{3}$$

که با توجه به مطالب ریاضی1 همان مختص

y مرکز ثقل ربع بیضی است و بهمین ترتیب

$\frac{a^2b}{3}=\int xdA$ که مختص x مرکز

ثقل است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

چند مورد کاربردی

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

1- ممان اینرسی :

ممان اینرسی یک ذره حول یک محور مساویست با حاصلضرب جرم آن در مربع فاصله آن از محور .

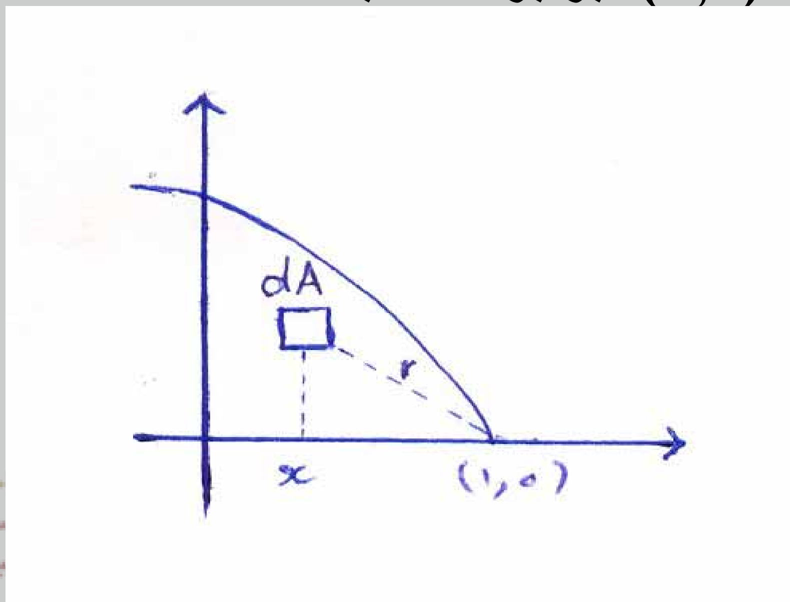
برای محاسبه ممان اینرسی یک ناحیه مسطح حول محوری عمود بر آن از انتگرال دوبل استفاده می کنیم.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

ممان اینرسی سطحی را که در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و توسط منحنی $y^2 = 1-x$ محدود شده حول محوری عمود بر سطح xy در $(1,0)$ را پیدا می نمائیم .

حل : **فاصله هر نقطه دلخواه $p(x,y)$ از نقطه $(1,0)$ برابر است با :**



$$f(x,y) = r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$M=\int_0^1\int_0^{1-y^2}\left[(x-1)^2+y^2\right]dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{(x-1)^3}{3}+xy^2\right]_0^{1-y^2}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{-y^6}{3}+y^2-y^4-\frac{1}{3}\right)dy$$

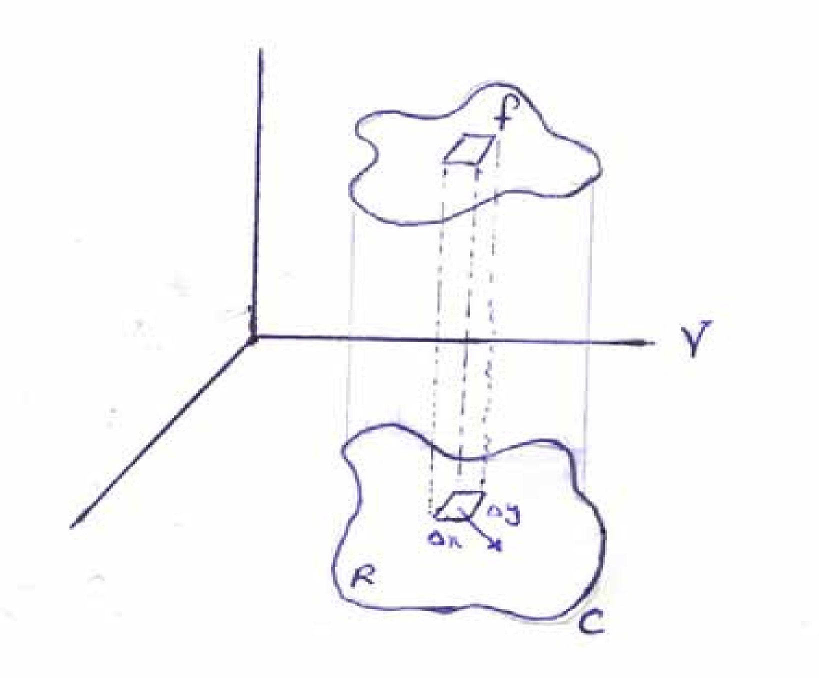
$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}y^7+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}y\,\Big|_0^1=\frac{44}{105}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

2- محاسبه حجم :

اگر $z=f(x,y)$ معادله یک سطح (رویه) باشد که توسط منحنی C بوجود آمده آنگاه حجم حادث از آن رویه و دو ناحیه محدود شده بوسیله دو مقطع آن رویه توسط منحنی C بوسیله انتگرال دوبل محاسبه می شود .



$$V=\int_R f(x,y)dA$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bo

تذکر : (هرگاه $f(x,y)=1$ باشد انتگرال دوبل مساحت

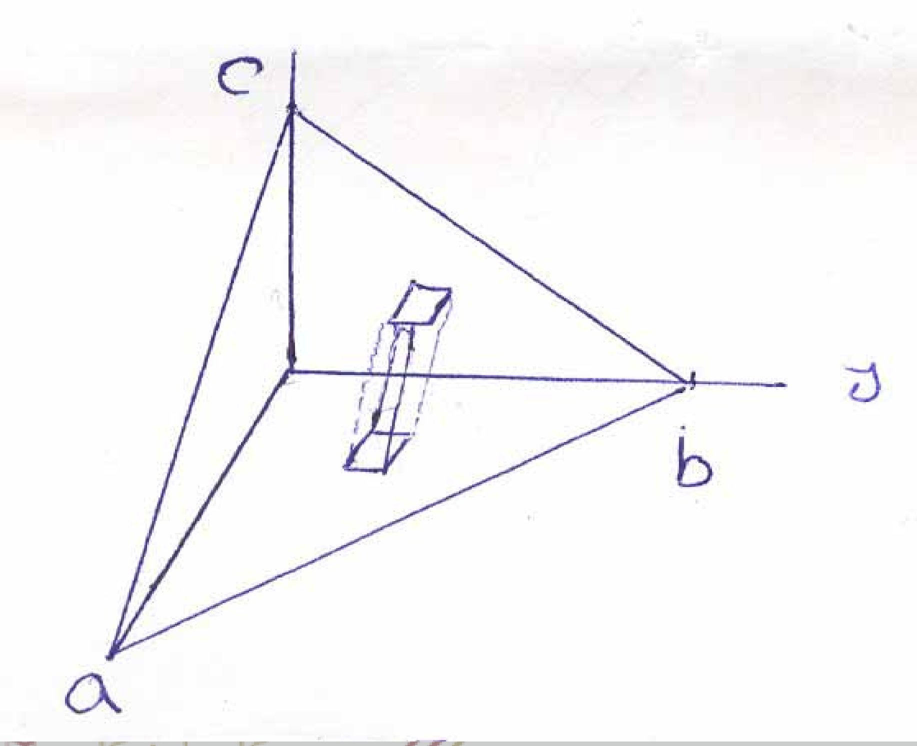
ناحیه R را بدست می دهد)

$$V=\int_R f\left(x,y\right)dA$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

حجم یک چهار وجهی که توسط سطح $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و سطوح مختصات محدود شده را پیدا کنید :



حل :

$$z=c\left(1-\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)$$

در صفحه xy منحنی C خط

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

است لذا خواهیم داشت :

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$V=\int_0^b\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} c\left(1-\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)dx\,dy$$

$$=c\int_0^b \left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{xy}{b}\right)\Bigg|_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} dy$$

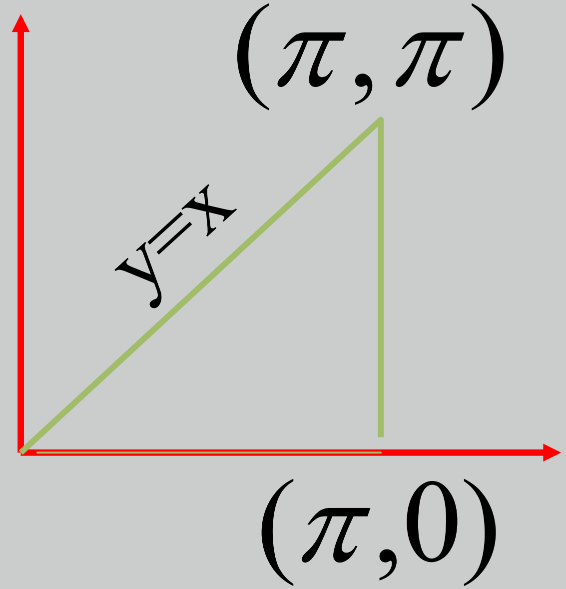
$$=ac\int_0^b\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}+\frac{y^2}{2b^2}\right)dy$$

$$=ac\left(\frac{1}{2}y-\frac{y^2}{2b}+\frac{y^3}{6b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{abc}{6}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين: اگر D مثلثي به رئوس (0و0)و $(\pi,0),(\pi,\pi)$ باشد انتگرال زير را روي D محاسبه كنيد:

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dA$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x} x\cos(x+y)\,dy\right]dx =$$

$$I = \int_0^{\pi}\left[\, x\sin(x+y)\right]_0^{x} dx = \int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 2x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx \ \Big|_0^{\pi}$$

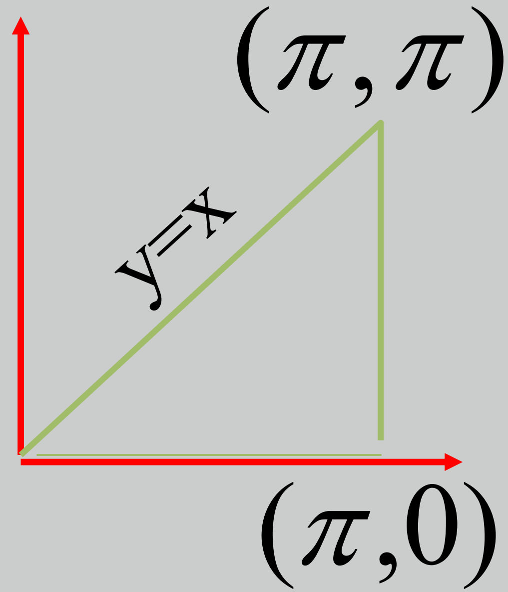
$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل را به کمك انتگرال دوگانه محاسبه کنید:

$$\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x} dy\right]dx=\int_0^{\pi} y\Big]_0^{x}dx=\int_0^{\pi} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\pi^2$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين: اگر D ذوزنقه اي به رئوس o=(0و0)و

A=(1,0),B=(1,2),c=(0,1)

باشد انتگرال زير را روي D محاسبه كنيد:

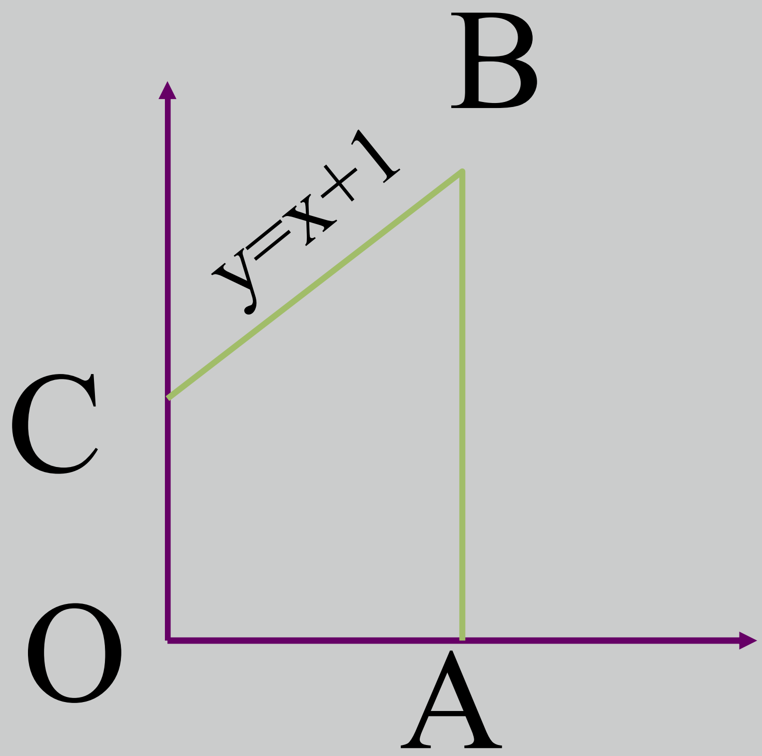
$$I = \iint_D (1+x)\sin y\,dx\,dy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

حل:

$$BC:\frac{y-2}{x-1}=\frac{1-2}{0-1}=1$$

$$y=x+1$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I = \int_0^1 \int_0^{x+1} (1+x)\sin y\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 -(1+x)\cos y \Big|_0^{x+1} =$$

$$= \int_0^1 (-(1+x)\cos(1+x) + (1+x)\cos 0)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (-\cos(1+x) - x\cos(1+x) + 1 + x)\,dx =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = \cos(1+x)dx \Rightarrow v = \sin(1+x)$$

$$I = \left(\begin{array}{l} -\sin(1+x) - (x\sin(1+x) \\ -\int \sin(1+x)dx + x + \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right)_0^1 =$$

$$= -\sin 2 - \sin 2 - \cos 2 + 1 + \frac{1}{2} +$$

$$+ \sin 1 + 0 + \cos 1 - 0 - 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل را به کمك انتگرال دوگانه محاسبه کنید:

$$A=\int_0^1\int_0^{1+x} dydx=\int_0^1 y\Big|_0^{1+x}dx=$$

$$=\int_0^1 (x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرين: انتگرال داده شده را روي ناحيه D محاسبه كنيد:

$$I = \iint_D e^{x+y}\, dA, D = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$$

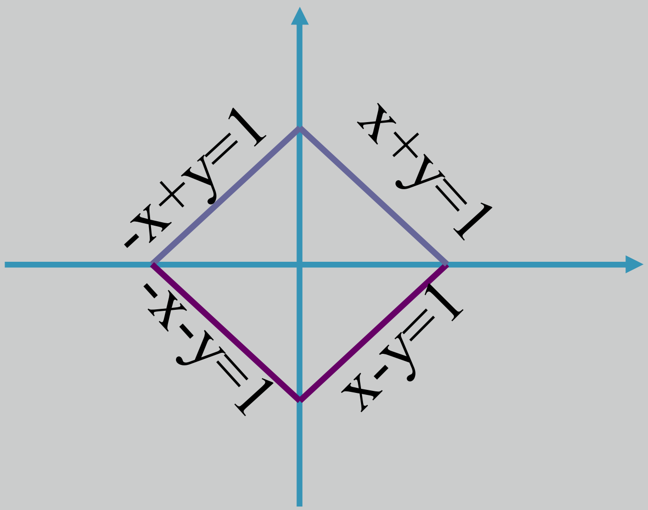
حل:

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y \le 1$$

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y \le 1$$

$$x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y \le 1$$

$$x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y \le 1$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I=\int_0^1\int_{y-1}^{1-y} e^{x+y}dxdy+\int_{-1}^0\int_{-y-1}^{1+y} e^{x+y}dxdy=$$

$$=\int_0^1 e^{x+y}\Big|_{y-1}^{1-y}dy+\int_{-1}^0 e^{x+y}\Big|_{-y-1}^{1+y}dy=$$

$$=\int_0^1 (e^{1-y+y}-e^{y-1+y})dy+$$

$$+\int_{-1}^0 (e^{y+1+y}-e^{-y-1+y})dy=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I=\int_0^1 (e-e^{2y-1})dy+\int_{-1}^0 (e^{2y+1}-e^{-1})dy=$$

$$=(ey-\frac{1}{2}e^{2y-1})\Big|_0^1+(\frac{1}{2}e^{2y+1}-e^{-1}y)\Big|_{-1}^0=$$

$$=e-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1}-e^{-1}=e-e^{-1}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل را به کمك انتگرال دوگانه محاسبه کنید:

$$A=\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} dxdy+\int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{y+1} dxdy=2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

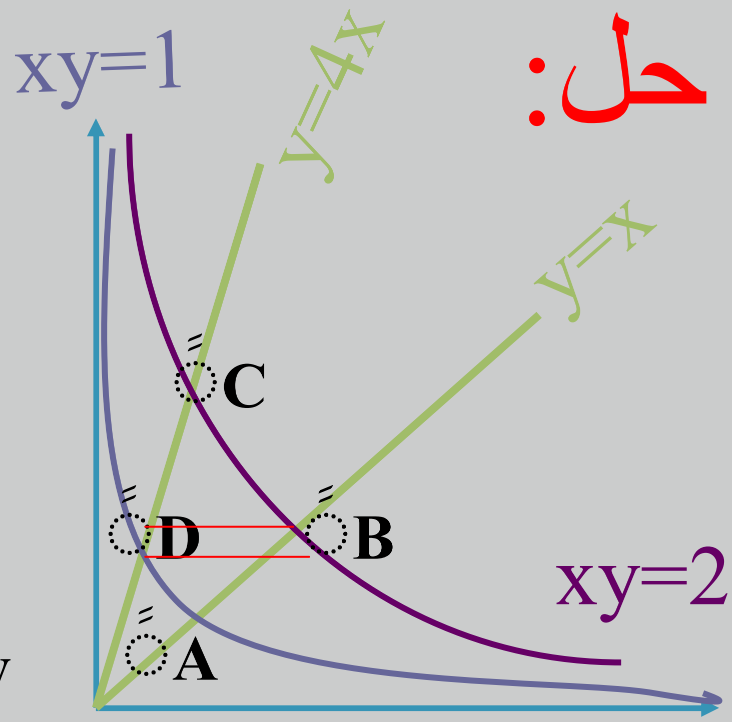
تمرين: انتگرال داده شده را روي ناحيه D محصور بين دو هذلولي $xy=2$, $xy=1$ و خطوط $y=x$, $y=4x$ واقع در ربع اول محاسبه كنيد:

$$I = \iint_D x^2 y^2 \, dxdy$$

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

حل:



$$A:\begin{cases} xy=1 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1=y$$

$$B:\begin{cases} xy=2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}=y$$

$$C:\begin{cases} xy=2 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=2\sqrt{2}$$

$$D:\begin{cases} xy=1 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I=\int_1^2\int_{1/y}^{2/y} x^2y^2\,dxdy+\int_2^{\sqrt{2}}\int_{y/4}^{y} x^2y^2\,dxdy+$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_{y/4}^{2/y} x^2y^2\,dxdy=\int_1^2 \frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{1/y}^{2/y}dy+$$

$$+\int_2^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{y/4}^{y}dy+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{y/4}^{2/y}dy=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I=\int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y}-\frac{1}{3y}\right)dy+\int_{2}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}y^{5}-\frac{1}{192}y^{5}\Big|\right)dy$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{8}{3y}-\frac{1}{192}y^{5}\right)dy=\int_{1}^{2}\left(\frac{7}{3y}\right)dy+$$

$$+\int_{2}^{\sqrt{2}}\frac{47}{48}y^{5}dy+\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{8}{3y}-\frac{1}{192}y^{5}\right)dy=$$

$$=\frac{7}{3}\mathrm{Lny}\Big|_{1}^{2}+\frac{47}{48\times 6}y^{6}\Big|_{2}^{\sqrt{2}}+\frac{8}{3}\mathrm{Lny}-\frac{1}{192\times 6}y^{6}\Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$= \frac{7}{3} Lny \Big|_1^2 + \frac{47}{48\times 6} y^6 \Big|_2^{\sqrt{2}} + \frac{8}{3} Lny - \frac{1}{192\times 6} y^6 \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} =$$

$$I = \frac{7}{3} Ln2 + \frac{47}{48\times 6} 2^3 - \frac{47}{48\times 6} 2^6 + \frac{8}{3} Ln2^{3/2} -$$

$$- \frac{1}{192\times 6} 2^9 - \frac{8}{3} Ln2^{1/2} + \frac{1}{192\times 6} 2^3 =$$

$$= \frac{7}{3} Ln2 + \frac{47}{36} - \frac{47}{9} + 4Ln2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} Ln2 + \frac{1}{144} =$$

$$= 5Ln2 - \frac{755}{144}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

نكته كاربردي1: اگر ناحيه انتگرال گيري R نسبت به محور y ها متقارن و f روي x فرد باشد، چون f(-x,y)=-f(x,y) آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال:(1-2-14)

$$f(x, y) = 2xy$$

$$R : y = 2 - x^2 , y = x^2$$

$$\iint\limits_R 2xydA = 0$$

ناحيه Rبين دو منحني محصور است.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

نکته کاربردي2: اگر ناحيه انتگرال گيري R نسبت به محور y ها متقارن و f روي x زوج باشد، چون f(-x,y)=f(x,y) آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy =$$

$$= 2 \iint_{rightsideofR} f(x,y)\,dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bo

مثال:(1-2-36)

مساحت دايره به شعاع r روي ناحيه D : كافي است از تابع f(x,y)=1 روي ناحيه و با توجه به نكته بيان شده انتگرال دو گانه بگيريم:

$$2\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dxdy = ?$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$s = 2\int_{-r}^{r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1dxdy = 2\int_{-r}^{r} x\Big|_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} =$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

$$x = r\sin\theta \Rightarrow dx = r\cos\theta d\theta, j = r$$

$$s = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2\theta d\theta =$$

$$= r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta = \pi r^2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پرندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

نکته کاربردي3: اگر ناحيه انتگرال گيري R نسبت به محور x ها متقارن و f روي y فرد باشد، چون f(x,-y)=-f(x,y) آنگاه:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = 0$$

راهنماي طلايي
تست طلايي
پيک طلايي
www.bookgolden.com

نکته کاربردي4: اگر ناحیه انتگرال گیري R نسبت به محور x ها متقارن و f روي y زوج باشد، چون f(x,-y)=f(x,y) آنگاه:

$$\iint_{R} f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{upsideofR} f(x,y)\,dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bool

انتگرال تریپل (سه گانه)

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

انتگرال سه گانه :

مشابه انتگرال یک گانه و دو گانه تقسیمات جزئی حجمی را در نظر می گیریم و حجم ناحیه را محاسبه می کنیم (برای توابع سه متغیره)

$$\int_R f(x,y,z)dv =$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

که با جایگذاری مناسب مشابه انتگرال دوگانه می توان بشکل زیر فرمول را تبدیل کرد :

$$\int_R f(x,y,z)dv =$$

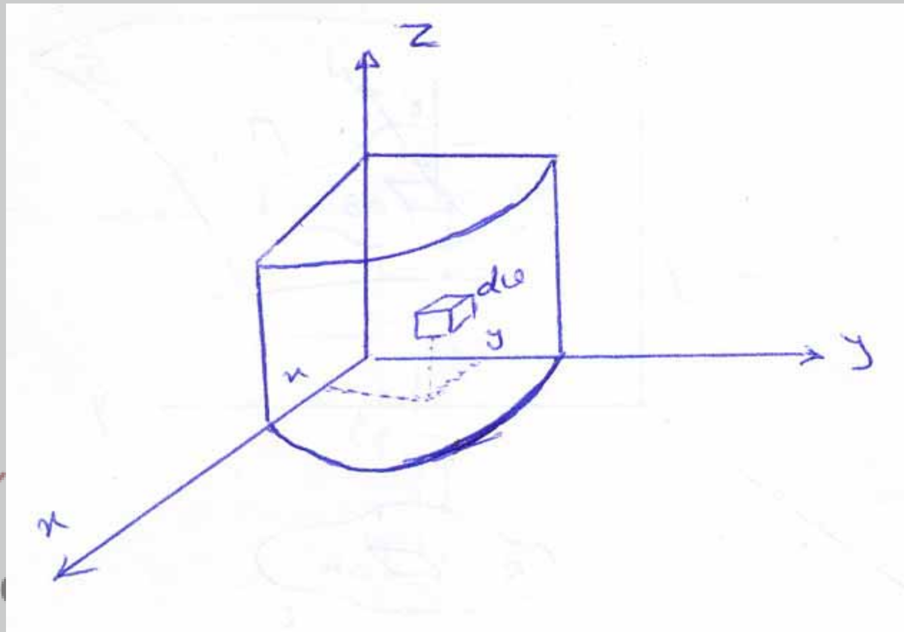
$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)dxdydz$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

مثال :

ممان اینرسی I_x جسم جامدی را که با استوانه $x^2+y^2=a^2$ و سطوح $z=b$ و $z=0$ محصور شده حول محور x (مطابق شکل) تعیین می کنیم (با فرض چگالی ثابت δ)



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.b

پاسخ :

چون فاصله هر نقطه از محور x با فرمول زیر بدست می آید .

$$r^2 = f(x,y,z) = y^2 + z^2$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$I_x = \int_R \left(y^2 + z^2\right)\delta \ dv$$

$$= 4\delta \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^b \left(y^2 + z^2\right) dzdydx$$

$$= 4\delta \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(by^2 + \frac{b^3}{3}\right) dydx$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$= 4\delta\int_0^a \left(\frac{by^3}{3} + \frac{b^3 y}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{4\delta b}{3}\int_0^a \left(a^2 + b^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}\; dx$$

اگر در نظر بگیریم :

$$x = a\sin\theta \qquad dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \qquad x = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$= \frac{4\delta a^2 b}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2 + b^2 - a^2 \sin^2\theta\right) \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{4\delta a^2 b}{3} \left[\left(a^2 + b^2\right) \frac{\pi}{2} - \frac{a^2 \pi}{10} \right]$$

$$= \frac{6a^2 b\pi}{12} \left(3a^2 + 4b^2\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\,dy\,dx$$

$$I=\int_0^1\Big[\int_0^{1-x}\Big[\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\Big]dy\Big]dx=$$

$$=\int_0^1\Big[\int_0^{1-x}\Big[\frac{1}{2}xyz^2\Big|_0^{1-x-y}dy\Big]dx=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

$$\int_0^1 [\ \int_0^{1-x} [\ \frac{1}{2}xy(1-x-y)^2\,dy\ ]dx =$$

$$\int_0^1 [\ \int_0^{1-x} [\ \frac{1}{2}xy(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy)dy\ ]dx =$$

$$\int_0^1 [\ \int_0^{1-x} [\ (\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yx^3+\frac{1}{2}xy^3-x^2y-xy^2+x^2y^2)dy\ ]dx =$$

$$\int_0^1 [\ \frac{1}{4}xy^2+\frac{1}{4}y^2x^3+\frac{1}{8}xy^4-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^3+\frac{1}{3}x^2y^3]_0^{1-x}dx =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$\int_0^1 \Big[\ \frac{1}{4}x(1-x)^2 + \frac{1}{4}(1-x)^2 x^3 + \frac{1}{8}x(1-x)^4$$

$$-\frac{1}{2}x^2(1-x)^2 - \frac{1}{3}x(1-x)^3 + \frac{1}{3}x^2(1-x)^3\Big]dx =$$

$$\int_0^1 \Big[\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^3$$

$$-\frac{1}{3}x + x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^2 - x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^5\Big]dx =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{24}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{1}{6}x^4 \right]dx =$$

$$= \frac{1}{48}x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{30}x^5 \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{48} + \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{144} - \frac{1}{30} =$$

$$= \frac{15+45-40+5-23}{5 \times 144} = \frac{2}{144 \times 5} = \frac{1}{360}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I=\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}} xz\,\Big|_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} dy\,dx=$$

$$\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}} x\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}\,dy\,dx=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$y = 2\sqrt{x}\sin\theta \Rightarrow dy = 2\sqrt{x}\cos\theta d\theta$$

$$\sqrt{4x - y^2} = \sqrt{4x - 4x\sin^2\theta} = 2\sqrt{x}\cos\theta$$

$$y = 0 \Rightarrow \theta = 0, y = 2\sqrt{x} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos^2\theta d\theta dx =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I=\int_0^2\int_0^{\pi/2} 2x\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta dx=$$

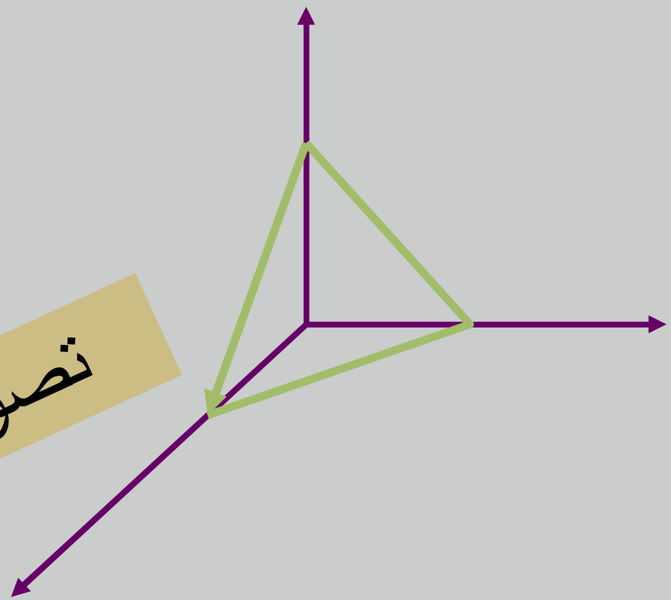
$$=\int_0^2 x(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)_0^{\pi/2}dx=\int_0^2 x(\pi/2)dx=$$

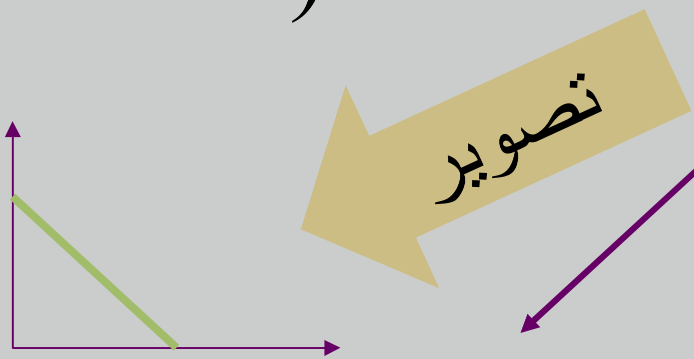
$$=\frac{\pi x^2}{4}\Big|_0^2=\pi$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: انتگرال زیر را روي ناحیهD
که محصور به صفحات مختصات و
صفحه x+y+z=1 است، محاسبه
کنید:

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$





راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل:

$$z = 0 \Rightarrow x + y = 1$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dzdydx}{(x+y+z+1)^3}$$

$$u = x + y + z + 1 \Rightarrow du = dz$$

$$\int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\left.\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right|_0^{1-x-y}=$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{(x+y+1-x-y+1)^{-2}}{-2}-$$

$$-\frac{(x+y+1)^{-2}}{-2}dydx$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{8} y - \frac{1}{2}(x+y+1)^{-1} \right)_0^{1-x} dx =$$

$$I = \int_0^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}(1-x) - \frac{1}{2}(x+1-x+1)^{-1} + \\ \frac{1}{2}(x+1)^{-1} \end{bmatrix} dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{8}(1-x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x+1)^{-1} \right] dx =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I=\int_0^1\left[-\frac{1}{8}(1-x)-\frac{1}{2}(x+1-x+1)^{-1}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{8}(1-x)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}\right]dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}Ln(x+1)\right]_0^1=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} Ln(2) =$$

$$-\frac{5}{16} + \frac{1}{2} Ln(2)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعریف ژاکوبین :

فرض کنید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ دو تابع دومتغیره

پیوسته باشند بطوریکه مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته

داشته باشند لذا

دترمینان تابعی u و v نسبت به x و y

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\equiv\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

در مورد تابع سه متغیره ژاکوبین بطور مشابه چنین تعریف می شود :

فرض کنیم :

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z) \qquad w = w(x, y, z)$$

$$J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) \equiv \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف قبل بهمین ترتیب برای توابعی با بیش از سه متغیر نیز تعمیم می یابد .

از ژاکوبین برای تغییر متغیر انتگرالهای چندگانه استفاده می شود. بدین ترتیب که اگر لازم شود در انتگرال $\int_R \ f(x,y)dA$ متغیر با قرار دادن $y=y(u,v),\quad x=x(u,v)$ تغییر داده شود عبارت dA برحسب جملات u و v بدین صورت تغییر می کند :

$$dA=\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|dudv$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

به عنوان مثال در تغییر متعیر به مختصات قطبی :

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta$$

$$J\left(\frac{x, y}{\rho, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

$$\Rightarrow dA = \rho \; d\rho \; d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

بنابراین بطور کلی داریم :

$$\int_R f(x,y)\,dA =$$

$$\iint_R f\left[x(u,v),\, y(u,v)\right] \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| du\,dv$$

$$= \iint_R F(u,v)\,du\,dv$$

و بطور مشابه نیز برای توابع سه متغیره محاسبه می شود .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تغيير متغير

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

مثال :

انتگرال دوگانه زیر که در دستگاه دکارتی است را به دستگاه قطبی تبدیل

و سپس محاسبه می کنیم :

تغییر متغیر : به قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = r\sin\theta & o \le r \le a \end{cases}$$

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dydx$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr}_{-\frac{1}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a}\,d\theta=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{3}\,d\theta=\frac{a^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^3\pi}{3.2}=\frac{\pi}{6}a^3$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

بهمین ترتیب تغییر متغیر (برای توابع سه متغیره) به دستگاه مختصات استوانه ای بطور خلاصه چنین می شود :

$$I(r,\theta,z)=r$$

وتغییرمتغیر به دستگاه مختصات کروی برابر است با :

$$I(\rho,\theta,\varphi)=\rho^{2}\sin\theta$$

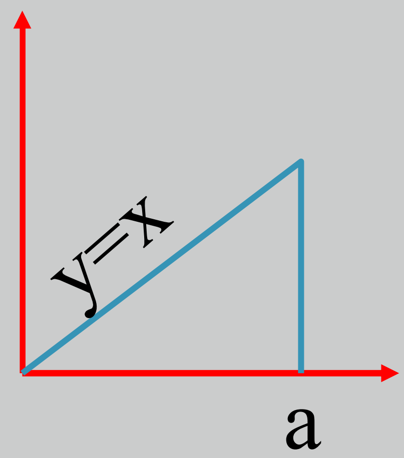
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين: انتگرال زير را با استفاده از تغيير متغير قطبي محاسبه كنيد:

$$\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

حل:

$$y=0 \to y=x \quad , x=0 \to x=a$$



$$r\sin\theta = r\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$r\cos\theta = a \Rightarrow r = \frac{a}{r\cos\theta} = a\sec\theta$$

راهنماي طلايي
تست طلايي
پيك طلايي
پويندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I = \int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{a\sec\theta} r^2\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{a\sec\theta} d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}(a\sec\theta)^3\, d\theta = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\pi/4} \sec\theta(1+\tan^2\theta)\, d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I=\frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi/4}\left(\sec\theta+\sec\theta\tan^2\theta\right)d\theta$$

$$u=\tan\theta\Rightarrow du=\sec^2\theta$$

$$dv=\sec\theta\tan\theta d\theta\Rightarrow v=\sec\theta$$

$$I=\frac{1}{3}a^3\begin{pmatrix} Ln\,|\sec\theta+\tan\theta|+\sec\theta\tan\theta \\ -\int_0^{\pi/4}\left(\sec^3\theta\right)d\theta \end{pmatrix}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I = \frac{1}{3}a^3\left(Ln\,|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

$$2I = \frac{1}{3}a^3\left(Ln\,|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{1}{6}a^3\left(Ln\,|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}a^3\left(Ln\,|\sqrt{2} + 1| + \sqrt{2}\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

اگر   جسمی باشد که در ناحیه اول مختصات قرار داشته باشد

و توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و صفحات

مختصات محصور شده باشد .

$\iiint_S xyzdv$

الف) با استفاده از مختصات کروی

ب) با استفاده از مختصات استوانه ای پیدا کنید .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل قسمت الف :

$$J=\iiint_S xyzdv=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4(\rho\cos\theta\sin\varphi)(\rho\sin\theta\sin\varphi)$$

$$.\rho\cos\varphi.\rho^2\sin\varphi\quad d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\frac{4^6}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sin^3\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi$$

1 4 2 4 3

$$\tan^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

ادامه قسمت الف :

$$= \frac{4^6}{6} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \quad dv$$

$$= \frac{4^6}{48} = \frac{4^4}{3}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

دنباله حل مثال(قسمت ب):

$$\iiint xyzdv =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}}(r\cos\theta)(r\sin\theta)zrdzdrd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{\sqrt{16-r^2}} r^3\cos\theta\sin\theta d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

ادامه قسمت ب :

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\left(16-r^2\right)r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{4}r^4-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^4\cos\theta\,d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه قسمت ب :

$$= \left(4^4 - \frac{4^6}{6} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^4 - \frac{4^6}{6} \right) = \frac{4^4}{3}$$

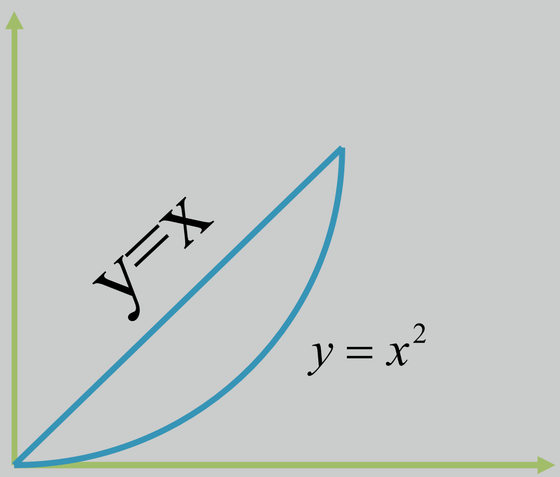
بنابراین از هر طریق جواب یکی است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين:انتگرال زير را با استفاده از تغيير متغير قطبي محاسبه كنيد:

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0),(1,1)$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$y = x \Rightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$y = x^2 \Rightarrow r\sin\theta = r^2\cos^2\theta \Rightarrow r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$I = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} dr\,d\theta = \int_0^{\pi/4} r \,\Big|_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \sec\theta \,\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

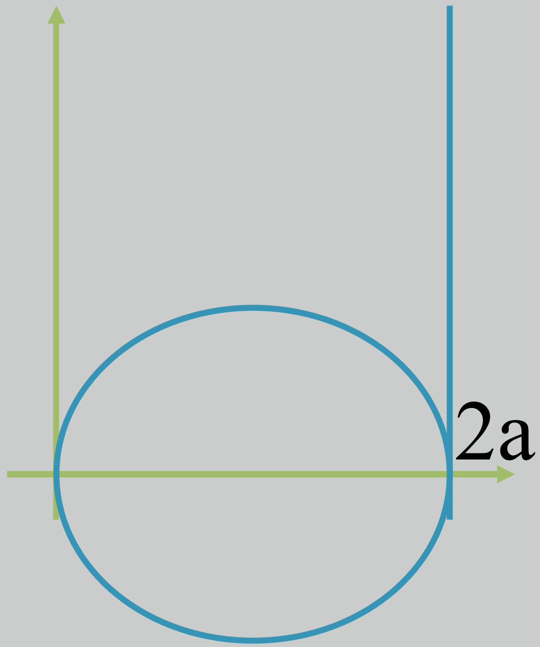
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين:انتگرال زير را با استفاده از تغيير متغير قطبي محاسبه كنيد:

$$I = \int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$y = \sqrt{2ax-x^2}$$

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta \Rightarrow r = 2a\cos\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2a\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{16a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = \frac{16a^4}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{16a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$= \frac{16a^4}{16} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$= a^4 \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$= a^4 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$= a^4 \left(\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3\pi a^4}{4}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتی

انتگرال خطی :

مقدمه: می دانیم حاصلضرب تغییر مکان و مولفه نیروی وارده در جهت تغییر مکان را کار انجام شده توسط این نیرو گویند .

بعبارت دیگر اگر $\vec{F}$ نیرو و $\vec{R}$ تغییر مکان باشد :

$$\vec{F}.\vec{R} = \underbrace{\|F\|}\|R\|\cos\theta$$

مولفه F در امتداد تغییر مکان

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

فرض کنیم که C منحنی نمایش یک تابع برداری $\vec{r}$ در

فاصله (a,b) باشد و $\vec{F}$ یک نیروی برداری باشد که در روی

C تعریف شده باشد و $\vec{F}.\vec{r}'$ در فاصله [a,b]

قابل انتگرال گیری باشد . در اینصورت کار انجام شده توسط

نیروی F برای بحرکت در آوردن یک ذره در امتداد C از

r(a) تا r(b) عبارت است از :

$$w=\int_a^b \vec{F}[\vec{r}(t)].\vec{r}'(t)dt$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

اگر نیروی $\vec{F}(x,y) = \sqrt{y}\ \vec{i} + (x-y)\vec{j}$

را داشته باشیم مقدار کار انجام شده توسط این نیرو را برای

بحرکت درآوردن ذره ای در امتداد y=x از A(0,0) تا

B(1,1) را بدست آورید .

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

پاسخ :

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j$$

$$= t\vec{i} + t\vec{j} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\left[x = t \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1\right]$$

$$\Rightarrow R'(t) = \vec{i} + \vec{j} \qquad (1)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه مثال :

$$F\left(R(t)\right) = \sqrt{t}\,\breve{i} + (t - t)j = \sqrt{t}\,\breve{i}$$

$$w = \int_0^1 F\left(R(t)\right).R'(t)dt$$

$$w = \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

انتگرال روی خم :

C عبارت از خم $a \le t \le b : (\varphi(t), \phi(t))$

انتگرال روی خم f(x,y) در مسیر C :

$$\int_C f(x,y)ds$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t), \phi(t)).\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\,dt$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

انتگرال روی خم روبرو را محاسبه کنید : $\int_C ye^{-x}\,ds$

که C عبارت است از خم زیر :

$$y = 2\tan^{-1} t - t + 3$$

$$x = Ln\left(1+t^2\right) \quad ,\left(0 \le t \le 1\right)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

پاسخ :

$$\int_C y e^{-x}\, ds$$

$$= \int_0^1 \frac{2\tan^{-1} t - t + 3}{1+t^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)} dt$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه پاسخ :

$$= \int_0^1 \frac{2\tan^{-1} t - t + 3}{1+t^2} dt$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1} t\, d\left(\tan^{-1} t\right) - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt +$$

$$3\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

ادامه پاسخ :

$$= 2\left(\tan^{-1} t\right)^2 - \frac{1}{2} Ln\left(1 + t^2\right)$$

$$+ 3\tan^{-1} t \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} Ln2 + \frac{3\pi}{4}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_C xydx + (y - x)dy$

در مسیر خطهای زیر که دو نقطه (0,0) و (1,1) را بیکدیگر وصل می کنند :

الف) خط y=x :

حل:

$$I = \int_0^1 \left[x^2 + (\cancel{x} - \cancel{x})dx\right] = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ب)سهمی $y=x^2$:

حل:

$$I=\int_0^1\left[x^3+2\left(x^2-x\right)x\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(3x^3-2x^2\right)dx$$

$$=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ج) سهمی $y^2=x$:

حل:

$$I=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)x^{-\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{17}{30}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: مطلوب است محاسبه انتگرال

زیر هرگاه c دایره $x^2+y^2=a^2$ پیموده

شده در جهت خلاف گردش عقربه

هاي ساعت باشد

$$I=\int_c \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2-y^2}$$

حل:

$$x=a\cos\theta \Rightarrow dx=-a\sin\theta d\theta$$

$$y=a\sin\theta \Rightarrow dy=a\cos\theta d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\theta+a\sin\theta)(-a\sin\theta d\theta)-(a\cos\theta-a\sin\theta)a\cos\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{-1}{\cos 2\theta}d\theta=-Ln\left|\sec 2\theta+\tan 2\theta\right|_0^{2\pi}=0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

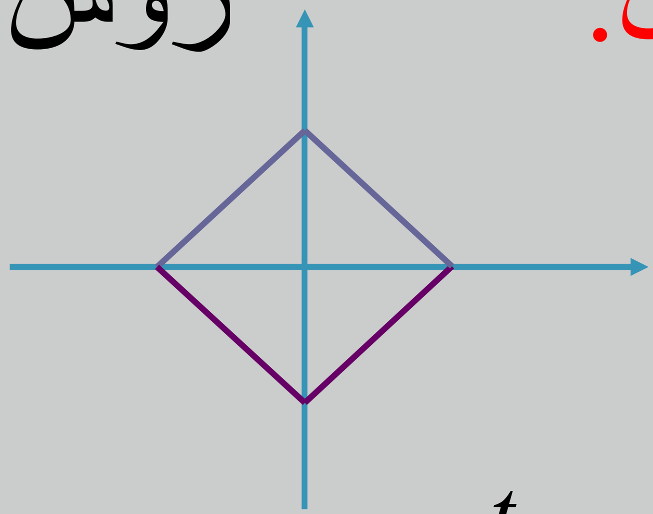
تمرين:مطلوب است محاسبه انتگرال زير هرگاه cمربعي به رئوس (1و0) و (0و1) و (-1و0) و(-1و0) در جهت خلاف گردش عقربه هاي ساعت باشد

$$I = \int_c \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل:

روش اول: در دو مسیر



$$x=t \Rightarrow dx=dt,\ y=1-|t| \Rightarrow dy=\frac{-t}{|t|}dt$$

$$I_1=-\int_{-1}^{1}\frac{dt+\frac{-t}{|t|}dt}{|t|+|1-|t||}=-\int_{-1}^{1}\ 2dt+\int_{-1}^{1}\ 0=-2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$x = t \Rightarrow dx = dt,\ y = |x| - 1 = |t| - 1 \Rightarrow dy = \frac{t}{|t|}dt$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dt + \frac{t}{|t|}dt}{|t + ||t| - 1||} = \int_{-1}^{0} 0 + \int_{0}^{1} 2dt = 2$$

$$I = I_1 + I_2 = 0$$

روش دوم: از چهار مسير روي مربع با نوشتن معادلات اضلاع.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرین: انتگرال زیر را روي مسیر داده شده cمحاسبه کنید:

$$I=\int_c e^x dx+e^y dy+e^z dz$$

$$c:r(t)=(t,t^2,t^3):0\le t\le 1$$

حل:

$$x=t,y=t^2,z=t^3$$

$$dx=dt,dy=2tdt,dz=3t^2$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I = \int_0^1 e^t dt + e^{t^2} 2tdt + 3t^2 e^{t^3} dt =$$

$$= e^t + e^{t^2} + e^{t^3} \Big|_0^1 = 3e - 3$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

دیفرانسیل کامل یا واقعی

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

یادآوری :

با فرض اینکه $f(x) = F'(x)$ باشد داریم :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$f(x)dx$ دیفرانسیل $F(x)$ است

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

بطور مشابه اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دو تابع دو متغیره باشند

آنگاه در صورتیکه برای

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1)$$

تابعی مثل $F(x,y)$ وجود داشته باشد که

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$$

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

دراینصورت رابطه (1) را دیفرانسیل واقعی یا کامل $F(x,y)$ گویند و یا بعبارت دیگر برای تابع $F(x,y)$ دیفرانسیل واقعی یا کامل چنین تعریف می شود :

$$dF = \frac{\partial}{\partial x} F dx + \frac{\partial}{\partial y} F dy$$

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

مثال1 :

$$F(x,y) = xy$$
$$dF(x,y) = ydx + xdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال 2:

با فرض $y \neq 0$

$$F(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow dF = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه :

شرط لازم و کافی برای آنکه $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

یک دیفرانسیل کامل باشد این است که

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال 3:

اگر $P(x,y)=y$ و $Q(x,y)=-x$ باشد آنوقت

$$\frac{\partial p}{\partial y}=1\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$$ بنابراین ydx-xdy

دیفرانسیل کاملی نیست .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال4 :

آیا عبارت روبرو دیفرانسیل کاملی است ؟

$$\left[(x+y+1)e^{x}-e^{y}\right]dx+\left[e^{x}-(x+y+1)e^{y}\right]dy$$

حل: بله زیرا :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y+1)e^{x}-e^{y}\right]=e^{x}-e^{y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x}-(x+y+1)e^{y}\right]=e^{x}-e^{y}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

میدانهای برداری کنسرواتیو
یا میدانهای برداری نگهدارنده :

اگر تابع اسکالر F بنحوی وجود داشته باشد که برای

بردار $\vec{V}$ داشته باشیم $\nabla F = \vec{V}$ در اینصورت F را

پتانسیل یا (نگهدارنده) نامند .

دراینصورت $\vec{V}$ را یک میدان برداری کنسرواتیو نامند و

داریم :

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

ثابت کنید که عبارت زیرکنسرواتیو است و تابع پتانسیل آن را بدست آورید .

$$\vec{V} = (x + 2y - z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (-x + y + 2z)\vec{k}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل :

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y-z & 2x-y+z & -x+y+2z \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftarrow \vec{V}$ یک میدان برداری کنسرواتیو است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

طبق تعریف :

$$\exists F \quad \nabla F = \vec{V} \Rightarrow$$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

$$= V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = V_1 = x + 2y - z$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = \int (x,y,z)dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2yx - zx + E(y,z) \quad (1)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + E_y(y,z) = V_2 = 2x - y + z$$

$$\Rightarrow E(y,z) = -y + z$$

$$E(y,z) = \int(-y+z)dy$$

$$= -\frac{1}{2}y^2 + yz + h(z) \quad (2)$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

ادامه جواب :

$$(1),(2)\Rightarrow F(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+2xy-zx$$

$$+yz-\frac{1}{2}y^2+h(z)\quad(3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}=-x+y+h_z(z)=V_3$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$,V_3 = -x + y + 2z \Rightarrow h_z(z) = 2z$$

$$h(z) = \int 2z\,dz = z^2 + c \quad (4)$$

$$3,4 \Rightarrow F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy$$

$$-zx - \frac{1}{2}y^2 + z^2 + z + c$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

کرل (چرخه) چرخش

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف کرل :

اگر تابع برداری **u** در همه نقاط تعریف شده مشتق پذیر باشد در اینصورت :

$$curl\,\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times u$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

کرل u را در نقطه (1,1,1) محاسبه کنید :

$$\vec{u} = xyz\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + 2yz^2\vec{k}$$

حل :

$$curlu = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -zx^2\;yz & 2yz^2 \end{vmatrix} =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$= \left(2z^{2} + 2x^{2}y\right)\vec{i} + xyj^{3} - 4xyz - xz$$

$$\nabla \times u(1,1,1) = 4i + j - 5k$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعریف عملگر لاپلاسین:

$$\nabla^2 = \nabla . \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

اگر $\nabla^2 u = 0$ دراینصورت u را تابع هارمونیک گویند.

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

لاپلاسین u را در نقطه (1,0,1) محاسبه کنید .

$$u = 6x^2 y^2 z^2 + x^3$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= 12y^2 z^2 + 6x + 12x^2 z^2 + 12x^2 y^2$$

$$\nabla^2 u(1,0,1) = 0 + 6 + 12 + 0 = 18$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

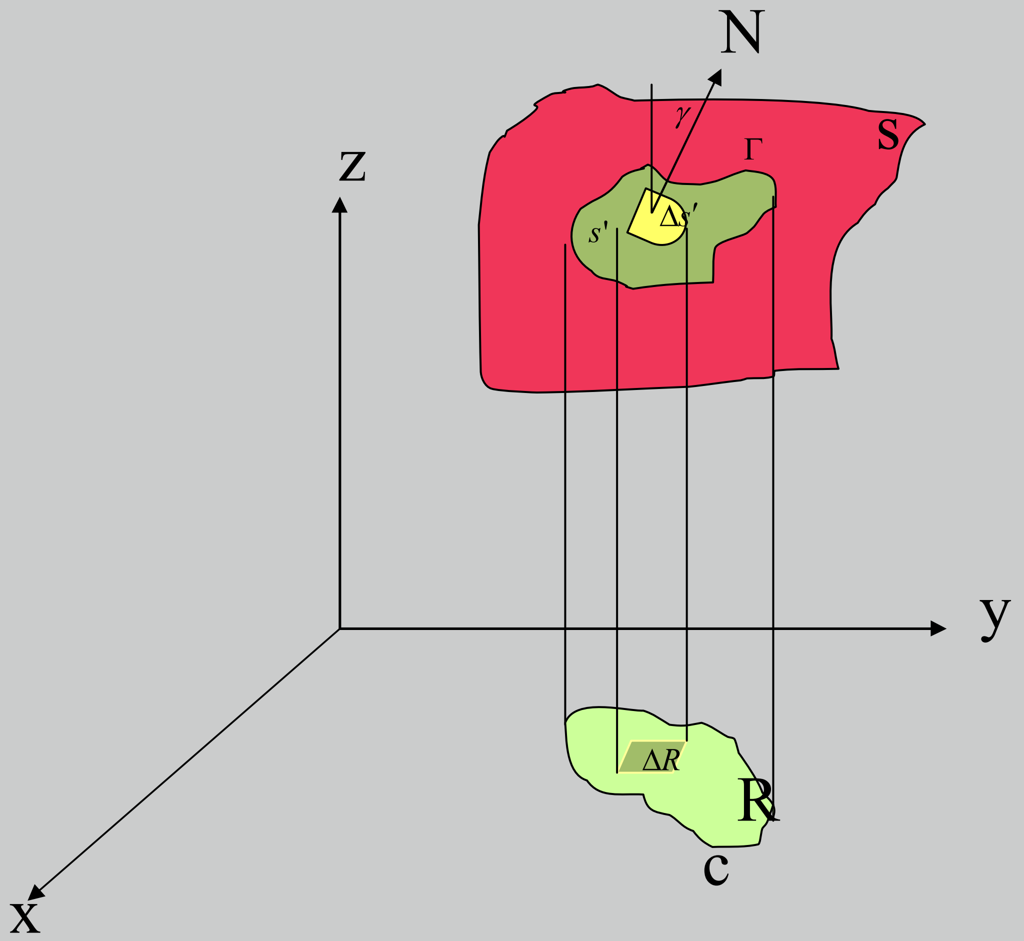
انتگرال رویه ای

برای تعریف و محاسبه مساحت و سطح رویه از انتگرالهای چندگانه استفاده می کنیم :

S′ قسمتی از سطح رویه که بوسیله منحنی بسته Γ محدود شده و $Z=f(x,y)$ معادله سطح رویه S

(با شرط اینکه هر خط موازی با محور z فقط در یک نقطه سطح **S′** را قطع کند محاسبات قابل انجام شدن است .

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

C تصویر Γ روی سطح xy و γ زاویه هادی خط

عمود برS یا قائم بر S است و پس از تقسیمات جزئی روی

مساحت ومجموع و حدگیری بطور خلاصه و در نتیجه:

$$S = \int_R \sec\gamma\, dA =$$

$$\rightarrow \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

بطور مشابه اگر بر سطوح دیگر مختص

نیز تصویر کنیم با توجه به زوایای هادی

فرمولهای مشابهی حاصل می شود و بطور

کلی انتگرال تابع $u(x,y,z)$ روی سطح

$z=f(x,y)$ را میتوان چنین تعریف نمود :

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$S=\int_R u(x,y,z)ds=$$

$$\iint_R u[x,y,f(x,y)]\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$

را که در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات

بین سطوح $Z=0$ و $Z=mx$ قرار

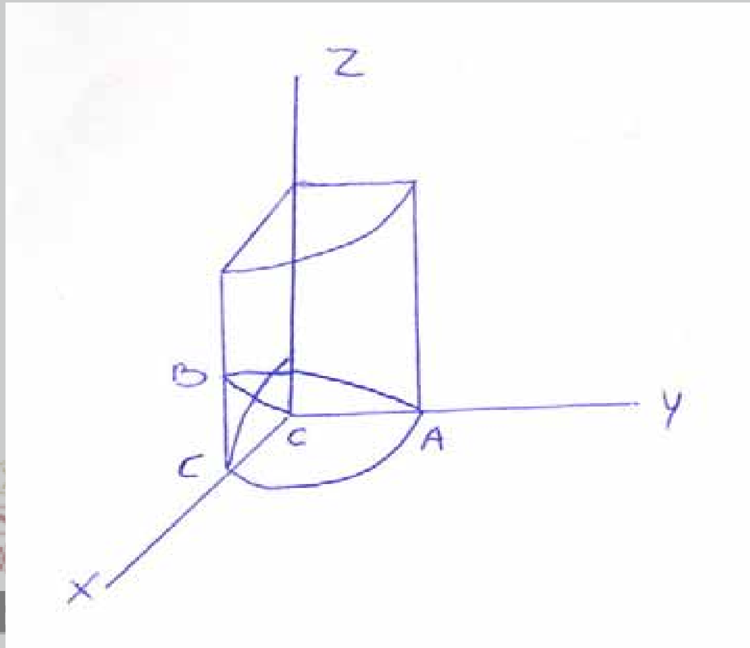
گرفته حساب کنید .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل :

بدیهی است که فقط این سطح روی صفحات xz یا xy قابل تصویر نمودن است چون قائم بر سطح xy روی سطح قرار دارد لذا روی xy قابل تصویر نمودن نیست .

حال با تصویر روی xz داریم :



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.l

$$S = \int_{CAB} \sec \beta dA$$

$$\sec \beta = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\sec \beta = \sqrt{0 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 + 1}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$\sec\beta = a\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$S = \int_0^a \int_0^{mx} a\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} dz\,dx$$

$$= \int_0^a amx\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= a^2 m$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

انتگرال رویه ای $\iint_R u(x,y,z)ds$ را در صورتیکه رویه

سهمیگون $z = 2-\left(x^2+y^2\right)$ بوده و u=1 است محاسبه کنید

. (توضیح اینکه چون u=1 است بنابراین $S=\iint_S ds$ یعنی مقدار

انتگرال رویه ای همان سطح رویه S است).

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل :

$$\iint_S u(x,y,z)ds =$$

$$\iint_R \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy$$

$$= \iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تصویر را روی صفحه xy می نماییم :

ادامه جواب :

$$R : Z = 0 \Rightarrow 2 - \left(x^2 + y^2 \right) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{13\pi}{3}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

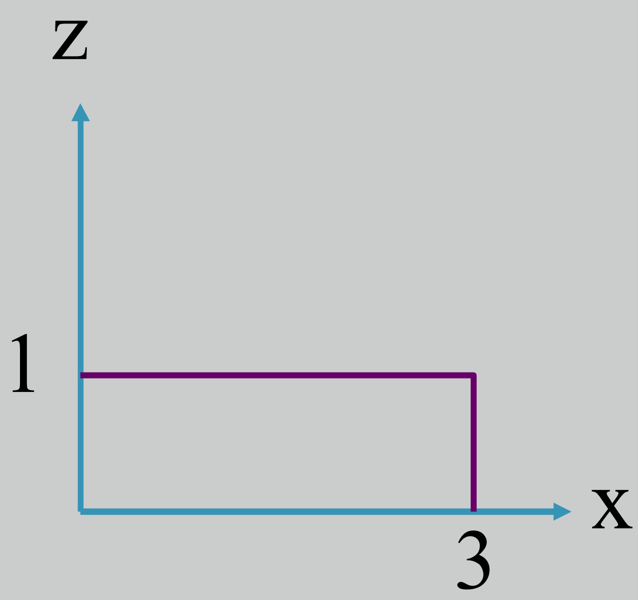
تمرين: مطلوب است محاسبه انتگرال زير ، اگرsقسمتي از صفحه 2x+3y=6 باشد كه توسط صفحات مختصات و صفحه z=1 بريده شده است و در اول واقع است:

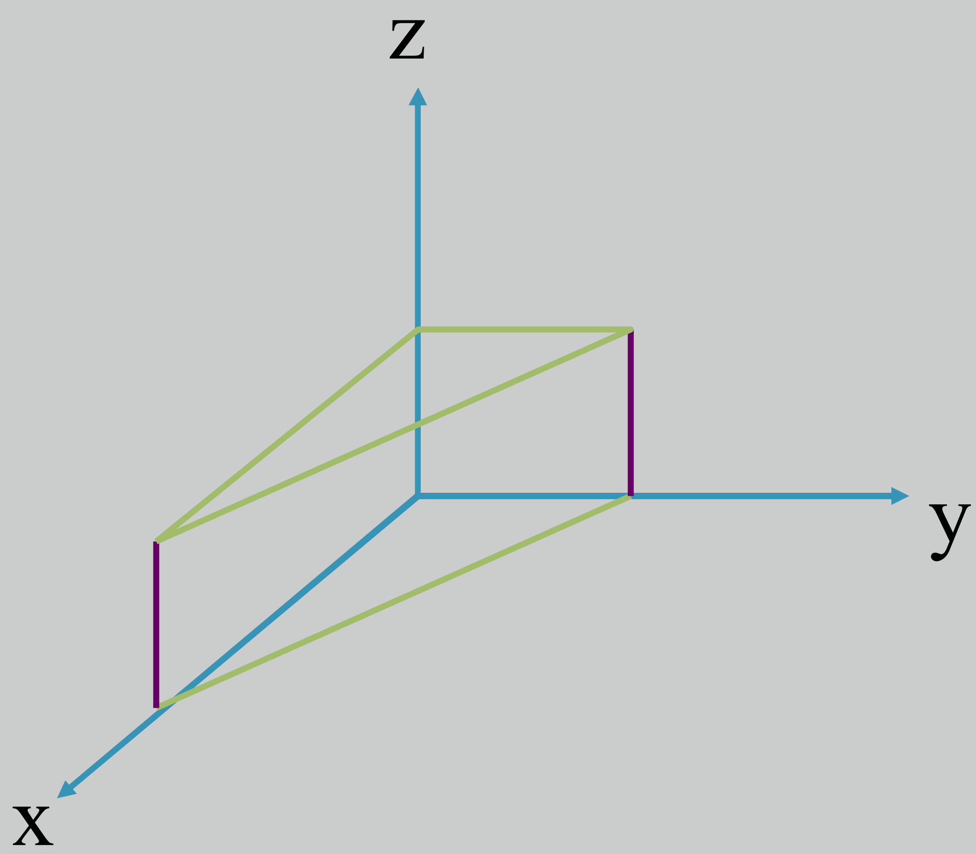
$$I = \iint_{S} xz\,ds$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل: رویه را بر صفحه x,z تصویر میکنیم

لذا داریم:





راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$2x+3y=6 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x}=2 \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial z}=0$$

$$\sec\gamma=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$I=\int_0^3\int_0^1 \sqrt{5}xzdzdx=\sqrt{5}\int_0^3 \frac{1}{2}xz^2 \Big|_0^1 dx=$$

$$=\sqrt{5}\int_0^3 \frac{1}{2}xdx=\frac{\sqrt{5}}{4}x^2 \Big|_0^3=\frac{27\sqrt{5}}{4}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تمرين: انتگرال رويه اي زير را در حالتي كه s قسمتي از مخروط

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

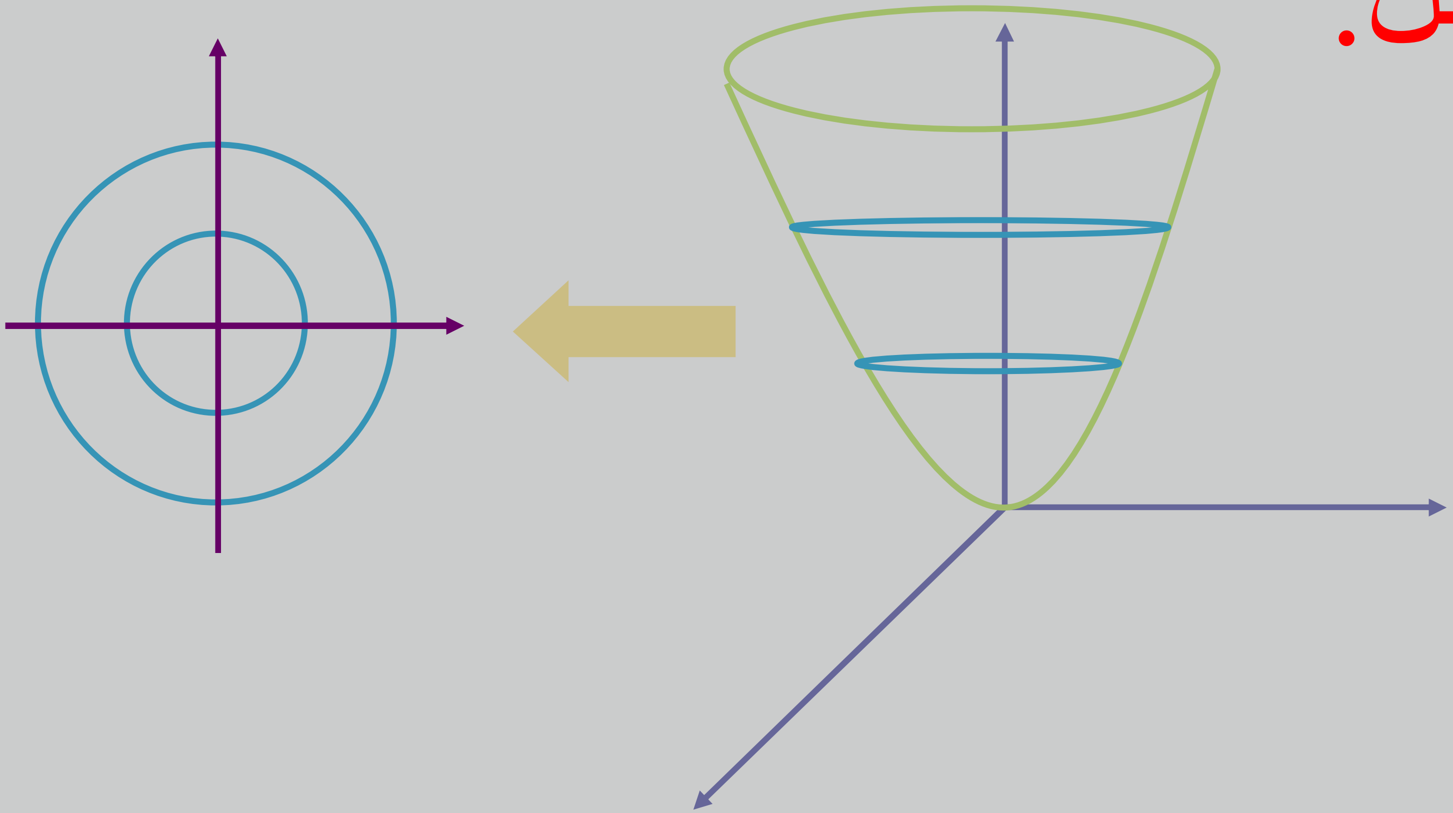
محصور بين صفحات z=1,

z=2است، محاسبه كنيد:

$$\iint_S Lnz\,ds$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل:



تصویر رویه را بر صفحه xyدر نظر میگیریم

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل:

$$z=1 \Rightarrow x^2+y^2=1,\ z=2 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sec\gamma=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$$

$$I=\iint_s Lnzds=\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{2}rLnrdrd\theta=$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$u = Lnr \Rightarrow du = \frac{dr}{r}, dv = rdr \Rightarrow v = \frac{1}{2}r^2$$

$$I = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}r^2 Lnr - \int \frac{1}{2}rdr\right]_1^2 \times \int_0^{2\pi} \theta d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{1}{2}r^2 Lnr - \frac{1}{4}r^2\right]_1^2 =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left[2Ln2 - 1 + \frac{1}{4}\right] = 2\sqrt{2}\pi\left[2Ln2 - \frac{3}{4}\right]$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تمرین: اگر رویه s معرفي شده توسط

$$z = 1 - x^2 - y^2 \ : (z \geq 0)$$

باشد. براي $F(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

انتگرال رویه زیر را محاسبه کنید:

$$\iint_s F.n\,ds$$

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

حل:

$$s : z + x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$n = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) \Rightarrow n = (2x, 2y, 1)$$

$$F.n = 2x^3 + 2y^3 + z^2 =$$

$$= 2x^3 + 2y^3 + (1 - x^2 - y^2)^2$$

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

تصویر s

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[2(r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta) + (1-r^2)^2\right] r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[2r^4(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + (1-r^2)^2 r\right] dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^5}{5}(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - \frac{1}{6}(1-r^2)^3\right]\Bigg|_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5}(\cos^3\theta + \sin^3\theta) + \frac{1}{6}\right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5}(\cos\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta(1-\cos^2\theta) + \frac{1}{6}\right] d\theta =$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$I = \frac{2}{5}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta - \cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{6}\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2}{5}\left(0 - 0 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{3} - 0 + 0 + 1 - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2\pi}{15}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

تعریف دیورژانس واگرائی :

تابع برداری مفروض :
$$\vec{u}(x,y,z)=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$$

اگر تابع برداری u در تمام نقاط تعریف شده مشتق پذیر باشد .

دیورژانس تابع u عبارت است از :

$$div\,\vec{u}=\nabla.\vec{u}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).u$$

$$=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

دیورژانس u را در نقطه $(1,1,1)$ حساب کنید :

$$\vec{u} = xyz\vec{i} + y^{3}z\vec{j} + xyz^{5}\vec{k}$$

$$div\,u = yz + 3y^{2}z + 5xyz^{9} = 1 + 3 + 5 = 9$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه گرین در صفحه :

اگر R یک میدان درصفحه xy باشد که توسط منحنی C محدود شده (منحنی بطوری است که هر خط موازی محورهای مختصات آنرا در بیش از دو نقطه

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قطع نکند) اگر P و Q توابعی پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند در اینصورت

$$F(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$$

$$\oint_c Pdx+Qdy=$$

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

با استفاده از قضیه گرین انتگرال خطی زیر را محاسبه نمائید .

$$I = \oint_c \left(x^2 + y^2\right) dx - 2xydy$$

$$c : x^2 + y^2 = 1$$

حل :

$$I = \iint_R (-2y - 2y)dxdy =$$

$$= -4\iint_R ydxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$= -4\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\sin\theta)\quad r\,dr\,d\theta$$

$$= -4\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\quad r^3\sin\theta\Big|_0^1 d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta$$

$$= +\frac{4}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}-\frac{4}{3} = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تبصره :

قضیه در حالتیکه منحنی بسته C طوری باشد که هر خط موازی محورهای مختصات آنرا در بیش از دو نقطه قطع کند نیز صادق است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

انتگرال خطی زیر را روی مسیر داده شده حساب

کرده و سپس با استفاده از قضیه

گرین مقدارانتگرال را بدست آورید و مقایسه کنید

:

$$I=\oint_c ydx+2xdy$$

$$R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

www.bookgolden.com

حل :

طبق قضیه گرین می توان چنین نوشت :

$$I = \oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$$

روی مسیر c_1

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow dx = dx \end{cases}$$

روی مسیر c_2

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 1 \\ 0 \le y \le 1 \Rightarrow dy = dy \end{cases}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

روی مسیر c_3 $\Rightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow dy=0 \\ 0 \le x \le 1 \Rightarrow dx=dx \end{cases}$

روی مسیر c_4 $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow dx=0 \\ 0 \le y \le 1 \Rightarrow dy=dy \end{cases}$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$I=\int_0^1 0dx+2x(0)+\int_0^1 y(0)+2dy+$$

$$\int_1^0 dx+2x(0)+\int_1^0 y(0)+2(0)dy$$

$$=\int_0^1 2dy+\int_1^0 dx$$

$$=2y\Big|_0^1+x\Big|_1^0=2-1=1$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حال با استفاده از قضیه گرین

$$I=\iint_R (2-1)\,dxdy$$

$$=\iint_R dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 dy=1$$

انتشارات طلایی پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

نتیجه : S مساحت میدان R را می توان از یکی از فرمولهای زیر بدست آورد :

$$S = \oint_c x\,dy = \iint_R dxdy$$

$$S = \oint_c y\,dx = -\iint_R dxdy$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_c - y\,dx + x\,dy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال :

با استفاده از قضیه گرین سطح بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بدست آورید :

حل : می دانیم معادلات پارامتری مسیر بدینگونه است :

$$\vec{R}(t)=x(t)i+y(t)j$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x(t)=a\cos t\Rightarrow dx=-a\sin t\,dt \\ y(t)=b\sin t\Rightarrow dy=b\cos t\,dt\end{cases}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$S = \oint xdy = \int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t dt)$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos^2 t}{2} dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}[2\pi] = \pi ab$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تبصره :

در مختصات قطبی مساحت از فرمول زیر به روش قبل محاسبه

می شود :

$$S = \oint_c \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

اولین فرم برداری قضیه گرین :

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

$$X(t) = x(t)i + y(t)j$$

$$S \Rightarrow d\vec{X} = \vec{T}ds$$

T بردار واحد مماس بر منحنی

s پارامتر طول قوس منحنی

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\int_c \vec{F}.\vec{T}ds = \oint_c \vec{F}.\vec{dr} = \oint_c Pdx + Qdy =$$

$$= \iint_R (\nabla \times F).\vec{k}dxdy = \iint (\nabla \times F).\vec{dA}$$

که $\vec{dA}$ برداری است عمود بر میدان

Rو به طول $\|\vec{dA}\| = dxdy$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

تعبیر فیزیکی :

اگر $F(x,y)$ نمایانگر جهت ومیزان شار Flow یک سیال

در نقطه (x,y) در صفحه باشد انتگرال فوق عبارت از انتگرال

مولفه ای از شار است که در جهت مماس بر منحنی است و

بنام گردش C در اطراف نقاط مرزی F موسوم است .

R

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

قضیه دیورژانس (قضیه گرین در فضا)

مقدمه :

بردار نرمال خارجی یک رویه : برداریست که

بر رویه عمود بوده و جهت ان به طرف خارج رویه

باشد .

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

مثلا : اگر یک کره بمرکز مبدا مختصات و شعاع

R ($X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$) داشته باشیم ، این

کره محور Z ها را در نقطه A و B قطع می

کند آنگاه بردار نرمال خارجی این کره در دو نقطه

A و B به ترتیب K و -K

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

يعنی در جهت مثبت ومنفی محور Z ها خواهد بود یعنی

$$\left[B\left(0,0,-R\right), A\left(0,0,R\right)\right]$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

قضیه دیورژانس :

عملا تبدیل انتگرال سه گانه به دوگانه و بالعکس

است .

فرض کنید S یک رویه و V فضای داخلی آن و

بردار $\hat{n}$ یکه نرمال خارجی بطوریکه تابع برداری

S عبارت از

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

$$\breve{A} = A_1\breve{i} + A_2\breve{j} + A_3\breve{k}$$

که A_1 و A_2 و A_3 توابع پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند در اینصورت خواهیم داشت:

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\iiint_{v} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV \quad =$$

$$\iint_{s} A_1\, dydz \quad + \; A_2\, dxdz \quad + \; A_3\, dxdy \quad =$$

$$\iint_{s} \left(A_1 \cos \quad u \; + \; A_2\, cocv \quad + \; A_3 \cos \quad w \right) ds$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\iiint \underbrace{\nabla}_{\text{دیورژانس}} \cdot \vec{A}\, dv = \iint \vec{A} \cdot \vec{n}\, ds$$

و یا

که u و v و w زوایای بردار نرمال خارجی رویه S در جهت

مثبت مثلثاتی با محورهای مختصات است .

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

مثال : قضیه دیور ژانس را در مورد مساله زیر تحقیق کنید.

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$$

$$s = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل :

قضیه : دیورژانس

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

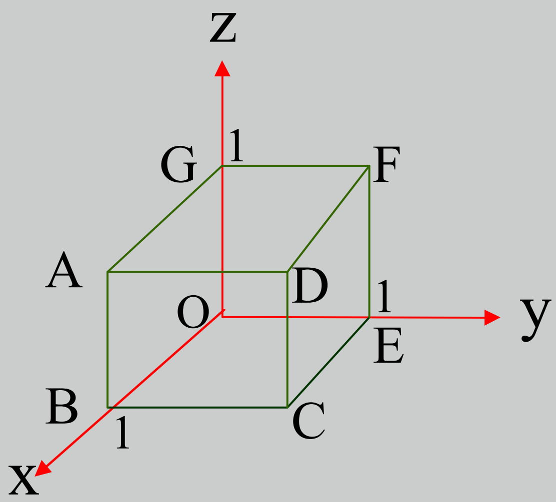
$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x+1)y + y^2 \Big|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 (2x+2)\,dx = x^2 + 2x \Big|_0^1 = 3$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com



راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه حل : رویه S چنین است که از شش سطح تشکیل شده بنابراین داریم :

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_{s_1} + \iint_{s_2} + \Lambda + \iint_{s_6}$$

$$s_1 = ABCD \quad , \quad \vec{n} = \vec{i} \qquad x = 1$$

$$\iint_{s_1} \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_{s_1} \left(x^2 i + y^2 j + z^2 k\right).ids$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$\iint_{s_1} x^2 ds = \int_0^1 \int_0^1 dydz = 1$$

$$s_2 = GOEF, \vec{n} = -i, x = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{s_2} \vec{F}.\vec{n} ds = -\iint_{s_2} x^2 ds = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$s_3 = AGFD, \vec{n} = \hat{k}, z = 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{s_3} \vec{F}.\vec{n}ds = -\iint_{s_3} z^2 ds = 1$$

$$s_4 = BOEC, \vec{n} = -\hat{k}, z = 0 \Rightarrow$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

ادامه جواب :

$$\iint_{s_4} \vec{F}.\vec{n}\,ds = -\iint_{s_4} z^2 ds = 0$$

$$s_5 = DFEC, \vec{n} = j, y = 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{s_5} \vec{F}.\vec{n}\,ds = -\iint_{s_5} y^2 ds = 1$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

$$S_6 = AGOB, n = -j, y = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_{S_6} \vec{F}.\vec{n}ds = -\iint_{S_6} y^2 ds = 0$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

دومين فرم برداري قضيه گرين (حالت خاص)

$$\oint_c pdy - qdx = \oint_c \vec{F}.\vec{n}\,ds = \iint_R divF\,dxdy$$

(با توجه به اينكه $divF = \nabla.F = \frac{op}{ox} + \frac{oq}{oy}$)

www.bookgolden.com

مثال:

اگر g تابع اسكالري با مشتقات جزئي پيوسته
مرتبه اول در ميدان باز s در صفحه xy باشد و
R ميداني در s باشد كه نقاط مرزي آن يك منحني
بسته ساده c باشد ثابت كنيد

$$\oint_c \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g\,dxdy$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

حل:

مي دانيم مشتق جهت دار g در امتداد n عبارت است از:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \vec{n}$$

با جايگزاري داريم:

$$\oint_c \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_c \nabla g \cdot \vec{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \nabla g\, dx dy$$

راهنماي طلايي
تست طلايي
پيک طلايي
www.b

قضيه استوكس:

حالت كلي قضيه گرين :

فرض كنيد كه رويه s طوري باشد كه تصاوير آن در صفحات مختصات بوسيله يك منحني بسته مسدود شده باشد ، اگر

y=h(x,z) و x=g(y,z) و

$$z = f(x, y)$$

انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
www.bookgolden.com

معادلات رويه s باشند و توابع f,g,h پيوسـته و داراي مـشتقات نـسبي مرتبـه اول باشند .آنگاه اگر

$$A = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{J} + + A_3 \vec{k} \Rightarrow \int_c \vec{A}.\vec{dr} = \iint_S (\nabla \times A).\vec{n}ds$$

با توجه به اينكه A_1, A_2, A_3 پيوسته و داراي مشتقات جزئي مرتبه اول پيوسته و

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

www.bookgolden.com

مثال:

قضیه استوکس را در مورد مسئله زیر تحقیق کنید.

$$\vec{A} = Z\vec{i} + x\vec{j}$$

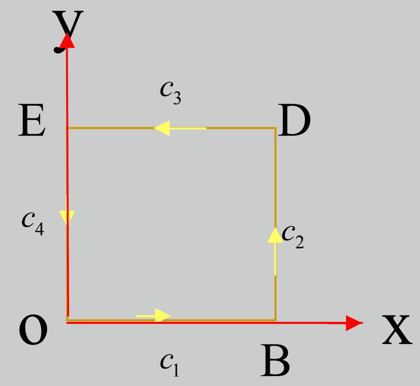
$$s: 0 \le x \le 1, ,0 \le y \le 1, z = 1$$

حل:

مي خواهيم تساوي زير (فرمول استوکس) را نشان دهيم:

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

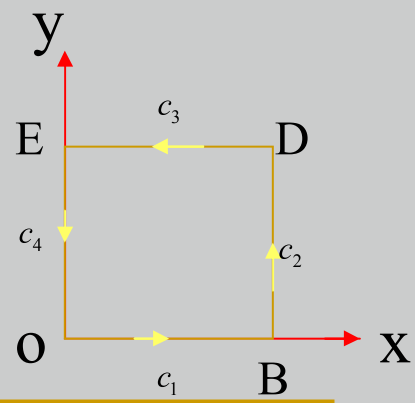
تصویر s روي xy از چهارمسیر c_1، c_2، c_3 و c_4 تشکیل شده



$$\int_{c} \vec{A}.\vec{dr} = \iint \left(\nabla \times \vec{A} \right) . \vec{n}\, ds$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

طرف اول



$$\int_c A.dr = \int_c (zi + xj).(dxi + dyj + dzk) =$$

$$= \int_c zdx + xdy = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$$

$$z = 1 : c_1 : y = 0, 0 \le x \le 1 \Longrightarrow dy = 0$$

$$\int_0^1 dx = 1$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

$$c_2 : x = 1, 0 \le y \le 1 \Rightarrow dx = 0$$ $$\int_0^1 dy = 1$$

$$c_3 : y = 1, 1 \le x \le 0, dy = 0$$ $$\int_1^0 dx = -1$$

$$c_4 : x = 0, 1 \le y \le 0, dx = 0$$ $$\int 0 dy = 0$$

$$\int_c \vec{A} \cdot \vec{dr} = 1$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com

خسرو حجتي

طرف دوم

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & 0 \end{vmatrix} = j = k$$

چون رويه s موازي صفحه xy است پس $\vec{n} = \vec{k}$

$$(\nabla \times A).n = (j + k).k = 1 \Rightarrow \iint (\nabla \times A) nds = \iint 1ds = \iint_s ds = \iint_R dxdy = 1$$

راهنمای طلایی
تست طلایی
پیک طلایی
انتشارات طلایی
پویندگان دانشگاه
www.bookgolden.com