۱- اندازه گیری و کمیت

در محیط پیرامون ما برخی از ویژگی‌ها مانند زیبایی یا مهربانی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. اما برای برخی از ویژگی‌ها مانند سنگینی و سبکی و یا بلندی و کوتاهی می‌توان یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان تعریف کرد و آن‌ها را اندازه‌گیری کرد.

ویژگی‌ای که بر اساس ارائه‌ی یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان قابل اندازه‌گیری است کمیت نامیده می‌شود.

۲- یکای (واحد) اندازه‌گیری

مقدار مشخصی از هر کمیت را به عنوان مقیاس اندازه‌گیری آن کمیت انتخاب می‌کنند که به آن یکا یا واحد اندازه‌گیری آن کمیت گفته می‌شود.

اندازه‌گیری هر کمیت به این صورت انجام می‌شود که مقدار آن کمیت چند برابر مقداری است که به عنوان یکا یا واحد اندازه‌گیری برای آن کمیت در نظر گرفته شده است.

برای آن که رقم‌های حاصل از اندازه‌گیری‌های مختلف یک کمیت با هم یکی باشند، دانشمندان توافق کرده‌اند که برای هر کمیت یکای معینی تعریف کنند.

یکای هر کمیت باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایط فیزیکی تعیین شده تغییر نکند و همواره در دسترس باشد.

مجموعه یکاهای مورد توافق بین‌المللی را به اختصار یکاهای SI می‌نامند.

SI حروف اول واژه‌ی فرانسوی Systeme International به معنای دستگاه بین‌المللی است.

۳- یکاهای اصلی و فرعی

آن دسته از کمیت‌هایی را که یکاهای آن‌ها به طور مستقل و بدون رابطه با سایر یکاهای دیگر تعریف می‌شود کمیت اصلی و یکاهای آن‌ها را یکای اصلی می‌نامند.

سایر کمیت‌ها را که یکاهای آن‌ها با کمک رابطه‌ی آن‌ها با کمیت‌های دیگر و با استفاده از یکاهای دیگر تعریف می‌شود کمیت فرعی و یکاهای آن‌ها را یکای فرعی می‌نامند.

طول ، جرم ، زمان ، دما و شدت جریان الکتریکی از جمله کمیت‌های اصلی در SI هستند.

نیرو، اندازه حرکت، کار و میدان الکتریکی از جمله کمیت‌های فرعی در SI هستند.

۴- تعریف یکای طول در SI

یکای طول در SI متر نام دارد و آن را با نماد m نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استانداردی ساخته شده است که در موزه‌ی سور پاریس نگهداری می‌شود. این نمونه میله‌ای است از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم با دو علامت روی آن که فاصله‌ی بین آن‌ها در دمای صفر درجه‌ی سلسیوس به طور دقیق برابر طول توافق شده‌ی بین‌المللی برای یک متر است. در موسسه‌های استاندارد هر کشور نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد تهیه و نگهداری می‌شود.

۵- تعریف یکای جرم در SI

یکای جرم در SI کیلوگرم نام دارد و آن را با نماد kg نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استانداردی به صورت استوانه‌ای از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم ساخته شده است که در موزه‌ی سور فرانسه نگهداری می‌شود. در موسسه‌های استاندارد همه‌ی کشورها نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد را تهیه و نگهداری می‌کنند.

۶- تعریف یکای زمان در SI

یکای زمان در SI ثانیه نام دارد و آن را با نماد s نشان می‌دهند. طبق تعریف اولیه و قدیمی یک ثانیه برابر $\frac{۱}{۸۶۴۰۰}$ یک شبانه‌روز است.

۷- یکای مناسب برای کمیت‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک

در SI پیشوندهایی برای یکاها تعریف کرده‌اند که با اضافه کردن آن‌ها به یکای هر کمیت می‌توان یکاهای بزرگ‌تر و کوچک‌تری را برای اندازه‌گیری مقدارهای خیلی بزرگ و خیلی کوچک به وجود آورد. این یکاها در جدول زیر آورده شده‌اند.

پیشوند	مضرب	نماد	پیشوند	مضرب	نماد
دسی	$۱۰^{-۱}$	d	دکا	۱۰	da
سانتی	$۱۰^{-۲}$	c	هکتو	$۱۰^{۲}$	h
میلی	$۱۰^{-۳}$	m	کیلو	$۱۰^{۳}$	k
میکرو	$۱۰^{-۶}$	μ	مگا	$۱۰^{۶}$	M
نانو	$۱۰^{-۹}$	n	گیگا	$۱۰^{۹}$	G
پیکو	$۱۰^{-۱۲}$	p	ترا	$۱۰^{۱۲}$	T

۸- نمادگذاری علمی

در اندازه‌گیری مقدارهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک به اعدادی برخورد می‌کنیم که به علت تعداد زیاد صفر در سمت راست آن اعداد و یا تعداد زیاد صفر بعد از ممیز آن اعداد در نمایش و خواندن آن‌ها با مشکل مواجه می‌شویم و در نتیجه احتمال اشتباه افزایش پیدا می‌کند و نوشتن و محاسبه آن‌ها دشوار است.

این اعداد را با استفاده از روشی که آن را نمادگذاری علمی می‌نامند نمایش می‌دهند تا هم در نمایش و هم در محاسبه سهولت ایجاد شود.

در نمادگذاری علمی هر مقدار را به صورت حاصل ضرب عددی بین ۱ و ۱۰ و ضرب توان صحیحی از ۱۰ می‌نویسند.

مثال ۱ : جرم یک الکترون بر حسب کیلوگرم برابر ۰/۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۹۱۰۹ است که آن را به صورت $۹/۱۰۹ \times ۱۰^{-۳۲}$ نشان می‌دهند.

مثال ۲ : فاصله‌ی زمین تا خورشید بر حسب متر حدود ۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ است که آن را به صورت $۱/۵ \times ۱۰^{۱۱}$ نشان می‌دهند.

۹- دقت اندازه‌گیری

کم‌ترین مقداری را که یک وسیله‌ی اندازه‌گیری می تواند اندازه بگیرد دقت اندازه‌گیری آن وسیله می‌نامند.

یک وسیله‌ی اندازه‌گیری نمی‌تواند مقداری را که کم‌تر از دقت اندازه‌گیری آن است اندازه‌گیری کند. بنابراین نتیجه‌ی اندازه‌گیری توسط یک وسیله‌ی اندازه‌گیری باید همواره مضرب درستی از دقت اندازه‌گیری آن وسیله باشد.

مثال ۱: در اندازه‌گیری طول با خط‌کشی که بر حسب میلی‌متر درجه‌بندی شده است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برحسب میلی‌متر بیان شود باید حتما عدد صحیح باشد.

مثال ۲: در اندازه‌گیری جرم با ترازویی که کم‌ترین درجه‌بندی آن برابر ۲۵۰ گرم است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برحسب گرم بیان شود باید حتما بر ۲۵۰ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۳: در اندازه‌گیری حجم مایع با پیمانه‌ای که حجم آن برابر ۵ سی‌سی است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برحسب سی‌سی بیان شود باید حتما بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

مثال ٤: اگر طول جسمی ۱۵۵ میلی‌متر و با خط‌کشی که دقت آن ۱cm است، طول آن را اندازه بگیریم مقدار اندازه‌گیری شده برابر ۱۵cm خواهد بود چرا که این خط‌کش مقادیر کوچک‌تر از ۱cm را نمی‌تواند اندازه بگیرد.

۱۰- تبدیل یکای طول :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک طول را که برحسب میکرومتر بیان شده است برحسب هکتومتر بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک میلی‌متر چند هکتومتر است.

$۱\ mm = ?\ hm$

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ ۱\ hm = ۱۰^{۲}\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{۱\ mm}{۱\ hm} = \frac{۱۰^{-۳}\ m}{۱۰^{۲}\ m} = ۱۰^{-۵} \Rightarrow ۱\ mm = ۱۰^{-۵}\ hm$$

(۲) روش دوم :

$$۱\ mm = x\ hm \Rightarrow ۱ \times ۱۰^{-۳} m = x \times ۱۰^{۲} m \Rightarrow ۱۰^{-۳} = x \times ۱۰^{۲} \Rightarrow x = ۱۰^{-۵}$$

۱۱- تبدیل یکای مساحت :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک مساحت را که برحسب کیلومترمربع بیان شده است برحسب دسی‌مترمربع بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک کیلومترمربع چند دسی‌مترمربع است.

$$۱\ km^۲ = ?\ dm^۲$$

توجه کنید که منظور از مساحت یک کیلومترمربع $\left(۱\ km^۲\right)$ مساحت یک مربع به ضلع یک کیلومتر است که این مساحت برابر $۱\ km \times ۱\ km = ۱۰۰۰\ m \times ۱۰۰۰\ m = ۱۰^۶\ m^۲$ به دست می‌آید.

به عبارت دیگر منظور از $km^۲$ دقیقا $(km)^۲$ است و نباید آن را $k\left(m^۲\right)$ و یا $۱۰^۳ m^۲$ فرض کرد.

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} ۱\ km = ۱۰^۳\ m \\ ۱\ dm = ۱۰^{-۱}\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{۱\ km}{۱\ dm} = \frac{۱۰^۳\ m}{۱۰^{-۱}\ m} = ۱۰^۴ \Rightarrow \left(\frac{۱\ km}{۱\ dm}\right)^۲ = ۱۰^۸$$

$$\Rightarrow \frac{۱\ km^۲}{۱\ dm^۲} = ۱۰^۸ \Rightarrow ۱\ km^۲ = ۱۰^۸\ dm^۲$$

(۲) روش دوم :

$$۱\ km^۲ = x\ dm^۲ \Rightarrow ۱ \times \left(۱۰^۳ m\right)^۲ = x \times \left(۱۰^{-۱} m\right)^۲ \Rightarrow ۱۰^۶\ m^۲ = x \times ۱۰^{-۲}\ m^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰^۶ = x \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow x = ۱۰^۸$$

۱۲- تبدیل یکای حجم :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک حجم را که برحسب دکامترمکعب بیان شده است برحسب گیگامترمکعب بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک دکامترمکعب چند گیگامترمکعب است.

$$۱\ dam^{۳} = ?\ Gm^{۳}$$

توجه کنید که منظور از حجم یک دکامترمکعب $\left(۱\ dam^{۳}\right)$ حجم یک مکعب به ضلع یک دکامتر است که این حجم برابر $۱\ dam \times ۱\ dam \times ۱\ dam = ۱۰\ m \times ۱۰\ m \times ۱۰\ m = ۱۰^{۳}\ m^{۳}$ به دست می‌آید.

به عبارت دیگر منظور از $dam^{۳}$ دقیقا $(dam)^{۳}$ است و نباید آن را $da\left(m^{۳}\right)$ و یا $۱۰\ m^{۳}$ فرض کرد.

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} ۱\ dam = ۱۰\ m \\ ۱\ Gm = ۱۰^{۹}\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{۱\ dam}{۱\ Gm} = \frac{۱۰\ m}{۱۰^{۹}\ m} = ۱۰^{-۸} \Rightarrow \left(\frac{۱\ dam}{۱\ Gm}\right)^{۳} = ۱۰^{-۲۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱\ dam^{۳}}{۱\ Gm^{۳}} = ۱۰^{-۲۴} \Rightarrow ۱\ dam^{۳} = ۱۰^{-۲۴}\ Gm^{۳}$$

(۲) روش دوم :

$$۱\ dam^{۳} = x\ Gm^{۳} \Rightarrow ۱ \times (۱۰ m)^{۳} = x \times \left(۱۰^{۹} m\right)^{۳} \Rightarrow ۱۰^{۳}\ m^{۳} = x \times ۱۰^{۲۷}\ m^{۳}$$
$$\Rightarrow ۱۰^{۳} = x \times ۱۰^{۲۷} \Rightarrow x = ۱۰^{-۲۴}$$

۱۳- کمیت‌های فیزیکی

کمیت‌های نرده‌ای : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد که اندازه یا مقدار آن کمیت می‌باشد، با یکای معین کافی است.

کمیت‌هایی مثل طول ، مساحت ، حجم ، جرم ، زمان ، چگالی و دما و جریان الکتریکی نرده‌ای هستند.

کمیت‌های برداری : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد با یکای معین کافی نیست و باید راستا و سوی این کمیت‌ها مشخص شود. به عبارت دیگر این کمیت‌ها دارای اندازه و جهت می‌باشند.

کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی ، سرعت و نیرو برداری هستند.

۱۴- بردارهای برابر

دو بردار در صورتی با هم برابرند که دارای اندازه ، راستا و سوی یکسانی باشند.

بردارهای قرینه

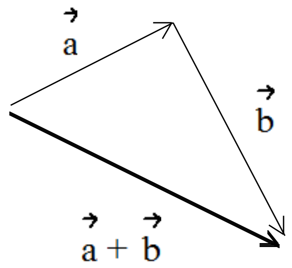
دو بردار در صورتی قرینه‌ی یک‌دیگرند که دارای اندازه و راستا یکسانی باشند و سوی آن‌ها متفاوت است.

زاویه یک بردار

زاویه‌ای است که این بردار در جهت مثلثاتی با راستای مثبت محور طول‌ها (x ها) می‌سازد.

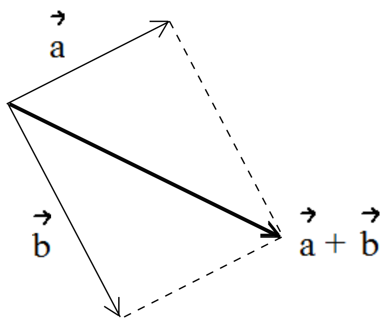
۱۵- جمع دو بردار با استفاده از روش مثلث

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a}+\vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار می‌دهیم. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار $\vec{a}$ و انتهای آن روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار دارد برآیند دو بردار است.

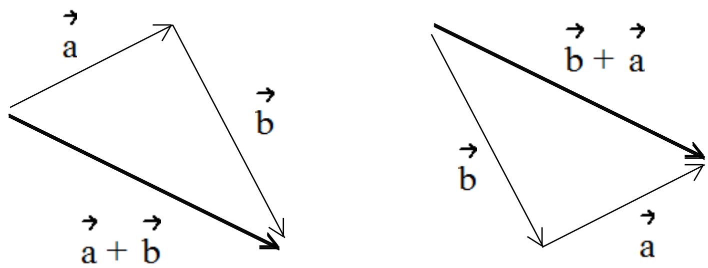


۱۶- جمع دو بردار با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a}+\vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را روی هم قرار می‌دهیم. متوازی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم که بردارها دو ضلع مجاور آن را تشکیل می‌دهند. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردارها و انتهای آن روی راس مقابل متوازی‌الاضلاع قرار دارد برآیند دو بردار است.



۱۷- نمایش خاصیت جابه‌جایی جمع برداری (با استفاده از روش مثلث)



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

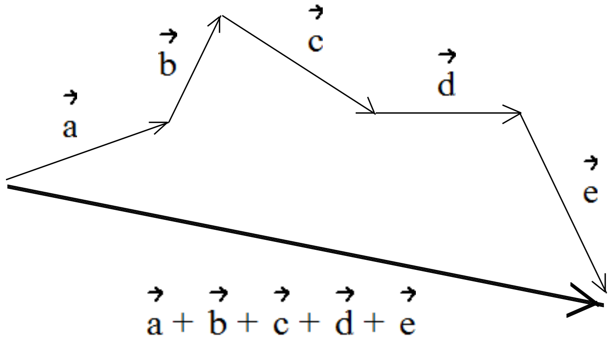
۱۸- نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار

برای نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار $\vec{X}$ از نماد $|\vec{X}|$ یا X استفاده می‌شود.

توجه : برای نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار $\vec{X}+\vec{Y}$ باید از نماد $|\vec{X}+\vec{Y}|$ استفاده کنیم و نمی‌توانیم از نماد $X+Y$ استفاده کنیم. زیرا نماد $X+Y$ به معنای مجموع بزرگی‌های (اندازه‌های) بردارهای $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ است و به عبارت دیگر $X+Y$ برابر $|\vec{X}|+|\vec{Y}|$ است.

۱۹- جمع چند بردار

برای جمع کردن چند بردار مانند بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ و $\vec{e}$ می‌توانیم به این ترتیب عمل کنیم که مطابق شکل زیر از انتهای بردار اول، برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم، برداری مساوی بردار سوم و همین‌طور تا آخر . . . رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار اول و انتهای آن روی انتهای بردار آخر قرار دارد برآیند بردارها است.



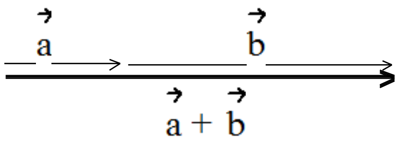
۲۰- بردارهای هم‌راستا و هم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و هم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$ یا $|\vec{a}+\vec{b}| = a+b$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار هم‌راستا و هم‌سو برابر جمع بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

در این حالت جمع دو بردار هم‌سو است.



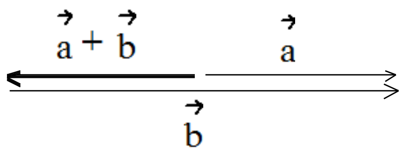
۲۱- بردارهای هم‌راستا و ناهم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و ناهم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

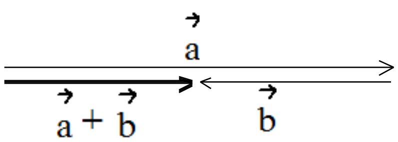
$|\vec{a}+\vec{b}| = \big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$ یا $|\vec{a}+\vec{b}| = |a-b|$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار هم‌راستا و ناهم‌سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

در این حالت جمع دو بردار با برداری که بزرگی‌اش بزرگ‌تر است، هم‌سو خواهد بود.



$|\vec{a}+\vec{b}| = b-a$

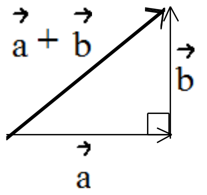


$|\vec{a}+\vec{b}| = a-b$

۲۲- بردارهای عمود بر هم :

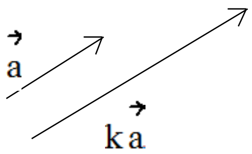
اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{یا} \quad |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$$



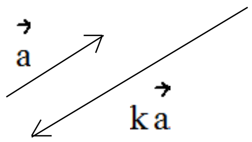
۲۳- ضرب عدد در بردار

ضرب عدد مثبت در بردار : وقتی برداری را در عدد مثبتی ضرب می‌کنیم، راستا و سوی آن تغییر نمی‌کند و تنها بزرگی بردار در آن عدد ضرب می‌شود. اگر فرض کنیم عدد مثبت k در بردار $\vec{a}$ ضرب شود داریم:



$k > 0$

ضرب عدد منفی در بردار : وقتی برداری را در عدد منفی ضرب می‌کنیم، راستای آن تغییر نمی‌کند و سوی آن عکس می‌شود و بزرگی بردار در قدرمطلق آن عدد ضرب می‌شود. اگر فرض کنیم که عدد منفی k در بردار $\vec{a}$ ضرب شود، داریم:

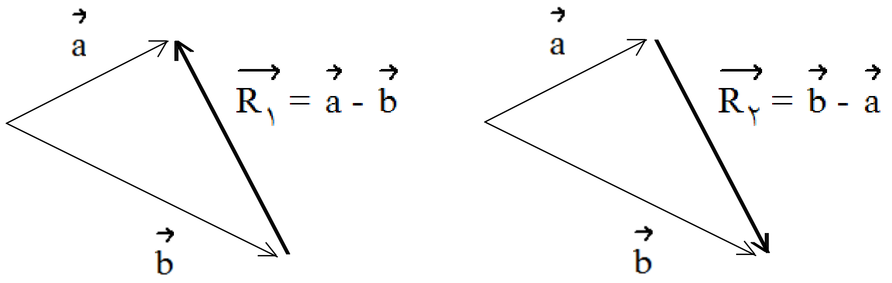


$k < 0$

۲۴- **تفریق دو بردار**

برای به دست آوردن تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مطابق شکل‌های زیر ابتدای بردارها را روی هم قرار می‌دهیم.

برداری که ابتدای آن روی انتهای بردار $\vec{b}$ و انتهای آن روی انتهای بردار $\vec{a}$ است برابر بردار $\vec{a}-\vec{b}$ است.



$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{b}+\vec{R_1}=\vec{a} \Rightarrow \vec{R_1}=\vec{a}-\vec{b} \\ \vec{a}+\vec{R_2}=\vec{b} \Rightarrow \vec{R_2}=\vec{b}-\vec{a} \end{cases}$$ روش مثلث برای جمع دو بردار

با توجه به شکل‌های بالا نتیجه گرفته می‌شود تفریق دو بردار خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی : $(\vec{a}-\vec{b} \neq \vec{b}-\vec{a})$

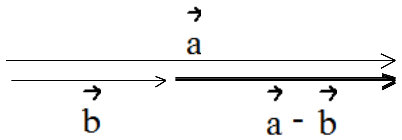
همچنین با توجه به شکل‌های بالا نتیجه گرفته می‌شود بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ قرینه‌اند و $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|$.

۲۵- بردارهای هم‌راستا و هم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و هم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|=\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$ یا $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|=|a-b|$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار هم‌راستا و هم‌سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

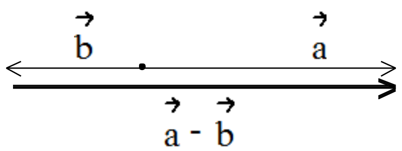


۲۶- بردارهای هم‌راستا و ناهم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و ناهم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ یا $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|=a+b$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار هم‌راستا و ناهم‌سو برابر جمع بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

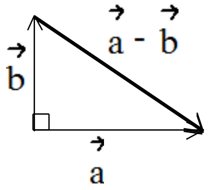


$|\vec{a}-\vec{b}|=a+b$

۲۷- بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$$|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲} \quad \text{یا} \quad |\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$



۲۸- بیشینه و کمینه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار

برآیند دو بردار وقتی بیش‌ترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم‌راستا و هم‌سو باشند. بنابراین بیشینه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $a+b$ است.

هم‌چنین برآیند دو بردار وقتی کم‌ترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم‌راستا و ناهم‌سو باشند. بنابراین کمینه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $|a-b|$ است.

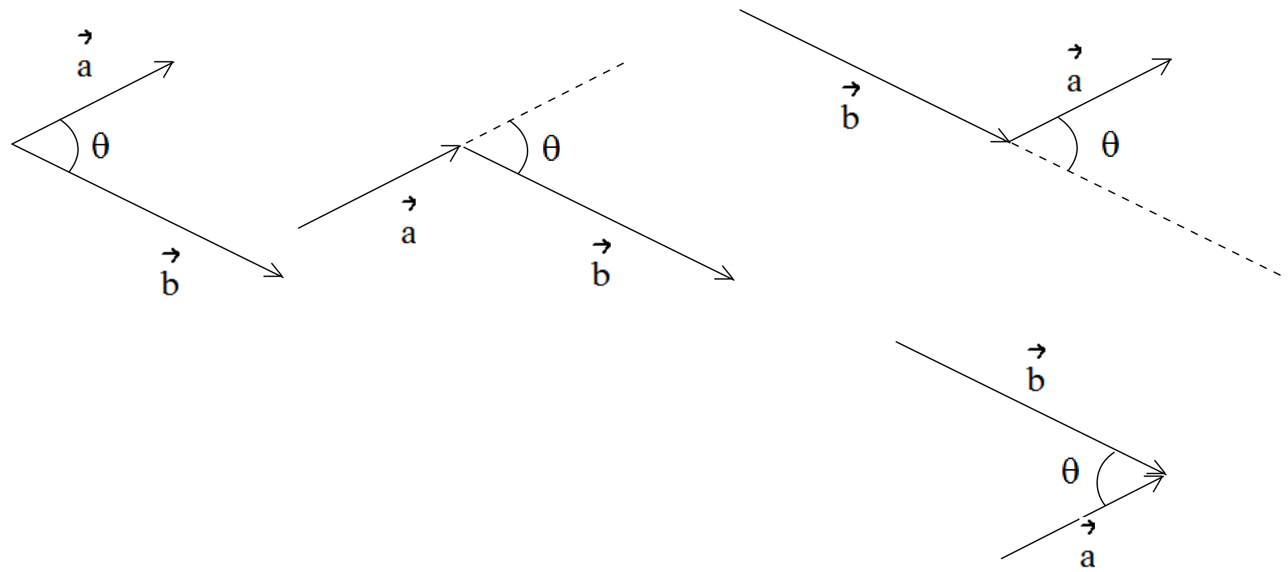
یعنی برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همواره داریم :

$$|a-b| \leqslant |\vec{a}+\vec{b}| \leqslant a+b$$

۲۹- زاویه‌ی دو بردار

زاویه‌ی بین دو بردار هنگامی معلوم می‌شود که ابتدای دو بردار روی هم قرار بگیرند. در شکل‌های زیر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده است. این زاویه، زاویه‌ای است بین صفر تا ۱۸۰ درجه.

$$۰ \leqslant \theta \leqslant ۱۸۰$$



۳۰- بزرگی اندازه‌ی برآیند دو بردار در حالت کلی

بزرگی برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow R = \sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos\theta}$$

۳۱- بزرگی اندازه‌ی تفریق دو بردار در حالت کلی

بزرگی تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow r = \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta}$$

۳۲- بزرگی اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه

بزرگی برآیند دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است و اندازه‌ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\vec{R} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow R = \sqrt{x^۲ + y^۲ + ۲xy\cos\theta} = \sqrt{a^۲ + a^۲ + ۲aa\cos\theta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{۲a^۲ + ۲a^۲\cos\theta} = a\sqrt{۲(۱ + \cos\theta)} = a\sqrt{۲\left(۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}\right)}$$

$$\Rightarrow R = ۲a\cos\frac{\theta}{۲}$$

۳۳- بزرگی اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه

بزرگی تفریق دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است و اندازه‌ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow r = \sqrt{x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos\theta} = \sqrt{a^۲ + a^۲ - ۲aa\cos\theta}$$

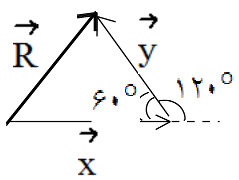
$$\Rightarrow r = \sqrt{۲a^۲ - ۲a^۲\cos\theta} = a\sqrt{۲(۱ - \cos\theta)} = a\sqrt{۲\left(۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}\right)}$$

$$\Rightarrow r = ۲a\sin\frac{\theta}{۲}$$

۳۴- نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آن‌ها ۹۰ درجه است برابر $\sqrt{۲}a$ است.

$$R = ۲a\cos\frac{\theta}{۲},\ \theta = ۹۰^\circ \Rightarrow R = ۲a \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow R = \sqrt{۲}a$$

۳۵- نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۲۰ درجه است برابر a (هم‌اندازه با بردارها) است.



$$R = ۲a\cos\frac{\theta}{۲},\ \ \theta = ۱۲۰^\circ \Rightarrow R = ۲a \times \frac{۱}{۲} = a$$

۳۶- نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آن‌ها ۶۰ درجه است برابر $\sqrt{3}a$ است.

$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \theta = 60^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$$

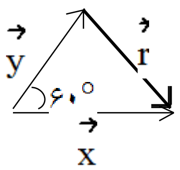
۳۷- نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آن‌ها ۹۰ درجه است برابر $\sqrt{2}a$ است.

$$R = 2a\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \theta = 90^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a$$

۳۸- نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۲۰ درجه است برابر $\sqrt{3}a$ است.

$$R = 2a\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \theta = 120^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$$

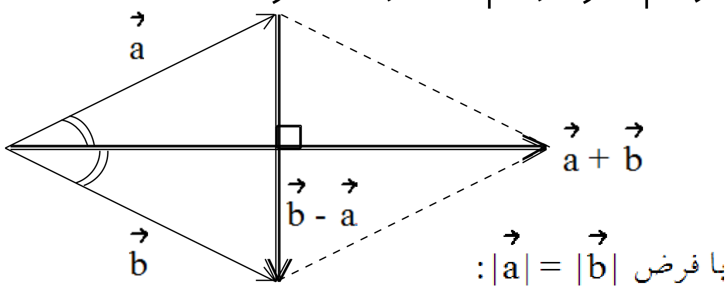
۳۹- نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آن‌ها ۶۰ درجه است برابر a (هم‌اندازه با بردارها) است.



$$R = 2a\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \theta = 60^\circ \Rightarrow R = 2a \times \frac{1}{2} = a$$

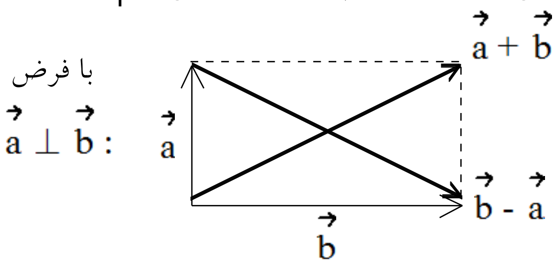
۴۰- خواص جمع و تفریق بردارهای هم‌اندازه

با توجه به شکل زیر جمع بردارهای هم‌اندازه در راستای نیم‌ساز بردارها قرار می‌گیرد و جمع و تفریق بردارهای هم‌اندازه بر هم عمود هستند. زیرا متوازی‌الاضلاعی که بردارها با یکدیگر می‌سازند لوزی است و قطرهای لوزی بر هم عمود و نیم‌ساز زاویه‌های لوزی هستند.



۴۱- خواص جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم

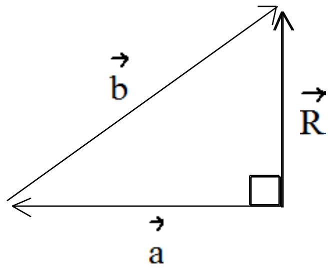
با توجه به شکل زیر جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم، هم‌اندازه هستند. زیرا متوازی‌الاضلاعی که بردارها تشکیل می‌دهند مستطیل است و قطرهای مستطیل هم‌اندازه‌اند.



۴۲- عمود بودن برآیند بردارها بر یکی از بردارها

اگر برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را $\vec{R}$ فرض کنیم و $\vec{R}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم :

$\vec{R} \perp \vec{a}:$

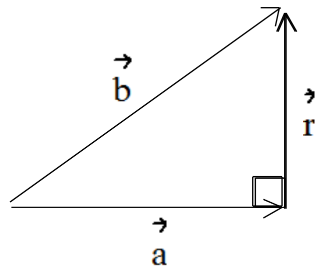


$$\Rightarrow R = \sqrt{b^2 - a^2}$$

۴۳- عمود بودن تفریق بردارها بر یکی از بردارها

اگر تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را $\vec{r}$ فرض کنیم و $\vec{r}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم :

$\vec{r} \perp \vec{a}:$



$$\Rightarrow r = \sqrt{b^2 - a^2}$$